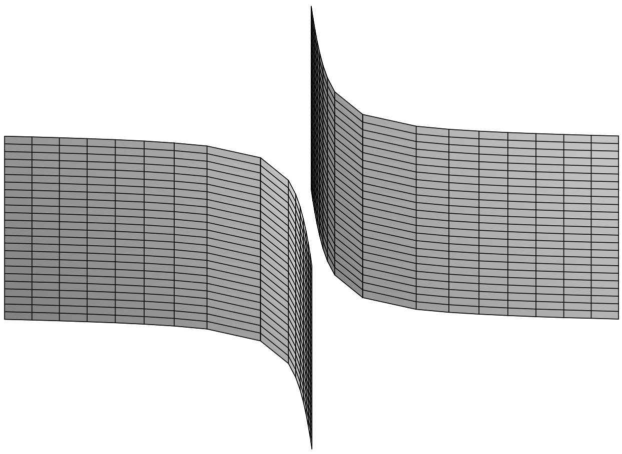
РУМЕН НИКОЛОВ ДАСКАЛОВ

ЕЛЕНА МЕТОДИЕВА ДАСКАЛОВА

В И С Ш А   М А Т Е М А Т И К А

ЧАСТ I



Линейна алгебра

Габрово, 2012

Автори: Авторите са преподаватели в катедра "Математика" на Технически университет - Габрово

проф. дмн Румен Николов Даскалов е завършил ФМИ на СУ"Св. Кл. Охридски". Защитил е дисертационен труд в областта на комбинаторната теория на кодирането. Член е на American Mathematical Society (AMS), The Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) и Съюз на математиците в България (СМБ).

доц. д-р Елена Методиева Даскалова е завършила ФМИ на СУ"Св. Кл. Охридски". Защитила е дисертационен труд в областта на комбинаторната теория на кодирането.

В И С Ш А   М А Т Е М А Т И К А, Част I,

Линейна алгебра.

Учебник за студенти от инженерно-технически специалности.

Първо издание, 92 стр.

ПРЕДГОВОР

Учебникът "Висша математика", част I (линейна алгебра), е предназначен за студенти от Технически университет - Габрово с образователно-квалификационна степен "бакалавър".

Основната цел на учебника е да намери необходимия баланс между последователното, логическо изграждане на математическите понятия и усвояването им от бъдещите инженери като основен апарат за изучаване на съответните общотехнически и специални дисциплини и използването им в бъдещите приложни и научни изследвания. В съответствие с ограничения хорариум, ударението е поставено на втората страна, като изложението е подкрепено с множество примери и подробно решени задачи.

Разгледани са следните раздели: комплексни числа; полиноми; матрици; детерминанти; ранг на матрица и системи линейни уравнения. Това е материалът, който се изучава от студентите от всички специалности през първия семестър.

Всяка глава съдържа съответния теоретичен материал, примери, голям брой решени задачи и задачи за самостоятелна подготовка. Всички задачи имат отговори, което ще улесни студентите при самостоятелната им работа. По-трудните задачи са отбелязани със звездичка.

Учебникът ще бъде особено полезен за студенти задочно и дистанционно обучение.

Октомври 2012 г. Авторите

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава 1

Комплексни числа

Целта на тази глава е да запознае читателя с множеството на комплексните числа, което е разширение на множеството на реалните числа. Ще научите, че има две основни форми на комплексните числа - алгебричен вид и тригонометричен вид; ще извършвате основните операции с комплексни числа; ще можете да решавате някои алгебрични уравнения, които нямат решение в множеството на реалните числа.

Множеството на естествените числа

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

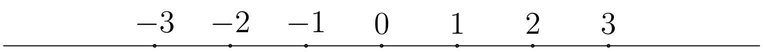
множеството на целите числа

$$\mathcal{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

множеството на рационалните числа

$$\mathcal{Q} = \{x = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad p, q \in \mathcal{Z}\},$$

и множеството на реалните числа $\mathcal{R}$ са добре познати от училищния курс по математика. Всяко едно от тях съдържа предходното, т.е. $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Освен това между множеството $\mathcal{R}$ и реалната права има взаимно-еднозначно съответствие, като на всяко реално число съответства точка от правата и обратно.



В множеството на реалните числа има уравнения, които нямат решение. Такова е например уравнението $x^2 + 1 = 0$. Тогава е естествено да си поставим въпроса: Има ли множество, което да е разширение на множеството на реалните числа и в него уравнението $x^2 + 1 = 0$ и други като него да имат решение? Отговорът е положителен. Такова множество е множеството на комплексните числа, с което ще се запознаем в тази глава.

Комплексни числа наричаме наредени двойки $z = (x, y)$ от реални числа x и y, за които е изпълнено: ако $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, то

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \tag{1.1}$$

$$z_1 + z_2 = (\ x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2\ ) \tag{1.2}$$

$$z_1 z_2 = (\ x_1 x_2 - y_1 y_2\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1\ ) \tag{1.3}$$

Числата от вида $z = (x, 0)$ се отъждествяват с реалните числа, т.е. $x = (x, 0)$, а числата от вида $z = (0, y)$ се наричат **чисто имагинерни.**

Комплексното число $i = (0, 1)$ се нарича **имагинерна единица**. За нея е изпълнено

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 i = -i,\ i^4 = i^3 i = -i^2 = 1,\ i^5 = i^4 i = i\ \ \ldots$$

Да пресметнем произведението на реалното число y и имагинерната единица $i = (0, 1)$.

$$yi = (y, 0)(0, 1) = (0, y)$$

Следователно

$$z\ =\ (x, y)\ =\ (x, 0) + (0, y)\ =\ x + yi$$

В този случай казваме, че комплексното число $z = x+yi$ е записано в **алгебричен вид.** Числата x и y се наричат съответно **реална част** и **имагинерна част** на комплексното число. Означават се с $Re\ z$ и $Im\ z$.

Обърнете внимание на това, че имагинерната част на комплексното число $z = x+iy$ е реалното число y, записано до имагинерната единица, а не целият израз yi.

Например, числото $z = 3 - 5i$ има реална част 3 и имагинерна част -5.

Числото $\overline{z} = x - yi$ се нарича **комплексно спрегнато** на $z = x + yi$.

Операциите с комплексни числа, записани в алгебричен вид, се задават с формулите:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \tag{1.4}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \tag{1.5}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \tag{1.6}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \tag{1.7}$$

$$(x_2^2 + y_2^2 \neq 0)$$

Тези формули се запомнят лесно: при умножението на две комплексни числа, записани в алгебричен вид, извършваме умножение на изразите в скобите и заместваме i^2 с -1; при деление на две комплексни числа, записани в алгебричен вид, умножаваме числителя и знаменателя с комплексно спрегнатото на знаменателя и извършваме умножението по описания по-горе начин.

Пример 1.1: Дадени са комплексните числа $z_1 = 2+3i$ и $z_2 = 1+i$. Пресметнете $z_1 + z_2,\quad z_1 - z_2,\quad z_1 z_2,\quad \dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение:

$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + i) = (2 + 1) + (3 + 1)i = 3 + 4i$

$z_1 - z_2 = (2+3i) - (1+i) = (2-1) + (3-1)i = 1 + 2i$

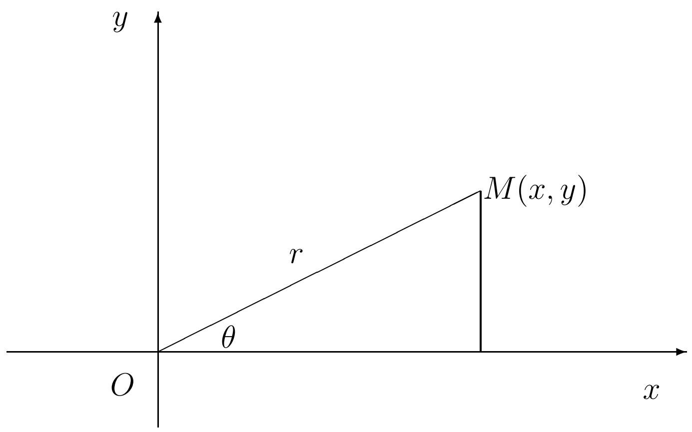
$z_1 z_2 = (2+3i)(1+i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i + 3(-1) = -1 + 5i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i+3}{1+1} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

Решете самостоятелно пример 1.2:

Пример 1.2: Дадени са комплексните числа $z_1 = 3-4i$ и $z_2 = 1+2i$. Пресметнете $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Отг. $4-2i$, $2-6i$, $11+2i$, $-1-2i$.



$Ox-$реална ос $Oy-$имагинерна ос

Чертеж 1

Ако в равнината е въведена правоъгълна координатна система, то между множеството на комплексните числа и точките в равнината съществува взаимно-еднозначно съответствие, като на всяко комплексно число $z = x + yi$ се съпоставя точката (x, y) с абсциса x и ордината y. Поради това съответствие равнината се нарича още **комплексна или Гаусова равнина**.

Векторът с начало началото на координатната система и край дадена точка от равнината се нарича **радиус-вектор** на тази точка. Да означим с r дължината на радиус-вектора на точката (x, y) и с θ ъгъла, който сключва радиус-векторът на тази точка с положителната посока на абсцисната ос.

Числото r се нарича **модул** на комплексното число z и се бележи с $r = |z|$. Следователно модулът на комплексното число е равен на разстоянието от началото на координатната система до точката (x, y), изобразяваща числото. Той е неотрицателно реално число.

Ъгълът θ се нарича **аргумент** на комплексното число и се бележи с $arg\ z$. Стойностите му могат да бъдат както положителни, така и отрицателни. За положителна посока е приета посоката, обратна на часовниковата стрелка. Всички аргументи на комплексното число се различават с целочислени кратни на 2π. Ако $0 \leq arg\ z \leq 2\pi$, той се нарича **главна стойност** на аргумента и се бележи с $Arg\ z$.

Зависимостите между x, y и r, θ са следните (виж черт. 1):

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{1.8}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \quad x \neq 0 \tag{1.9}$$

Следователно

$$z \ = \ x + yi \ = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.10}$$

В този случай казваме, че комплексното число $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ е записано в **тригонометричен вид**.

> **Обърнете внимание** на това, че при тригонометричния вид на комплексното число *ъгълът* при функциите синус и косинус *е един и същ*

Тригонометричният вид на комплексните числа е по-удобен за извършване на операциите умножение, деление, степенуване и коренуване.

Нека $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$, $z_1 = r_1(cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ и $z_2 = r_2(cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ са комплексни числа.
Тогава

$$z_1z_2 = r_1r_2[cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.11}$$

$$z^n = [r(cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(cos\, n\theta + i\sin\, n\theta), \tag{1.12}$$

където n е естествено число. Формула (1.12) се нарича **формула на Моавър**.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.13}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}) \tag{1.14}$$

$$k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

В последната формула за коренуване на комплексни числа под $\sqrt[n]{r}$ се разбира аритметичният корен от неотрицателното число r. От нея също се вижда, че намирането на $n-$ти корен от комплексно число е възможно винаги. Съществуват n на брой различни стойности (получаваме ги, давайки на k стойности $0, 1, 2, ..., n-1$). Съответните им точки са разположени в комплексната равнина върху една централна окръжност с радиус $\sqrt[n]{r}$ и я делят на n равни части, т.е. лежат във върховете на правилен $n-$ъгълник.

> **Запомнете:**
> 1. При умножение на комплексни числа, записани в тригонометричен вид, модулите се умножават, а аргументите се събират.
> 2. При деление на комплексни числа, записани в тригонометричен вид, модулите се делят, а аргументите се изваждат.

Ще докажем равенства (1.11) и (1.14). Равенство (1.12) се получава след прилагане неколкократно на (1.11), а (1.13) се доказва аналогично на (1.11).

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$. С това формула (1.11) е доказана.

Нека сега

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Повдигаме двете страни на последното равенство на n-та степен, прилагаме формулата на Моавър и получаваме

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$$

Но две комплексни числа, зададени в тригонометричен вид, са равни, ако имат равни модули, а аргументите им се различават с целочислено кратно на 2π. Следователно

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad\qquad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

Различните стойности на $\sqrt[n]{z}$ се получават, като даваме на k стойности от 0 до $n-1$. Ако продължим да даваме на k стойности $n, n+1, \dots$, то получените стойности ще започнат да се повтарят. С това формула (1.14) е доказана.

<u>*Пример 1.3*</u>: Дадени са комплексните числа $z_1 = 4(cos\,\dfrac{\pi}{3} + i\sin\,\dfrac{\pi}{3})$ и $z_2 = 2(cos\,\dfrac{\pi}{4} + i\sin\,\dfrac{\pi}{4})$. Пресметнете z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_2^3, $\sqrt[3]{z_1}$.

Решение:

$$z_1z_2 = 4(cos\,\frac{\pi}{3} + i\sin\,\frac{\pi}{3})2(cos\,\frac{\pi}{4} + i\sin\,\frac{\pi}{4}) = 8(cos\,\frac{7\pi}{12} + i\sin\,\frac{7\pi}{12})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4(cos\,\frac{\pi}{3} + i\sin\,\frac{\pi}{3})}{2(cos\,\frac{\pi}{4} + i\sin\,\frac{\pi}{4})} = 2(cos\,\frac{\pi}{12} + i\sin\,\frac{\pi}{12})$$

$$z_2^3 = [2(cos\,\frac{\pi}{4} + i\sin\,\frac{\pi}{4})]^3 = 8.(cos\,\frac{3\pi}{4} + i\sin\,\frac{3\pi}{4})$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{4(cos\,\frac{\pi}{3} + i\sin\,\frac{\pi}{3})} = \sqrt[3]{4}(cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\sin\,\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}) \qquad k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ получаваме първата стойност на корена - $w_0 = \sqrt[3]{4}(cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9})$.

При $k = 1$ – втората стойност на корена - $w_1 = \sqrt[3]{4}.(cos\dfrac{7\pi}{9} + i\sin\dfrac{7\pi}{9})$.

При $k = 2$ – третата стойност на корена - $w_2 = \sqrt[3]{4}(cos\dfrac{13\pi}{9} + i\sin\dfrac{13\pi}{9})$.

Числата w_0, w_1 и w_2 лежат на централна окръжност с радиус $\sqrt[3]{4}$ и са върхове на равностранен триъгълник.

Както знаем от училищния курс по математика, в множеството на реалните числа има наредба. Това означава, че ако са дадени две реални числа, то или двете са равни или едното е по-голямо от другото. **В множеството на комплексните числа няма наредба** т.е. при комплексните числа не можем да казваме, че едно комплексно число е по-голямо или по-малко от друго.

ЗАДАЧИ

1.1 Извършете означените действия и резултата запишете в алгебричен вид.

а) $(2+3i)(4-5i)$ б) $(1+3i)(2+i)(1-i)+4i$

в) $(1+i)(2-i)^2+3i$ г) $\dfrac{3+i}{1+i}$

д) $\dfrac{1-i}{1+i}+2i$ е) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5+2i$

Решение:

а) Разкриваме скобите и получаваме

$$(2+3i)(4-5i) = 8-10i+12i-15i^2 = 23+2i.$$

б) Аналогично

$$(1+3i)(2+i)(1-i)+4i = (-1+7i)(1-i)+4i = 6+8i+4i = 6+12i.$$

в) При този пример използваме формулата $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$(1+i)(2-i)^2+3i = (1+i)(4-4i-1)+3i = (1+i)(3-4i)+3i = 7+2i.$$

г) Умножаваме числителя и знаменателя с комплексно спрегнатото на знаменателя (формула 1.7) и получаваме

$$\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

д)

$$\frac{1-i}{1+i}+2i = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+2i = \frac{-2i}{2}+2i = -i+2i = i$$

е) От д) знаем, че $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$. Следователно

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5+2i = -i^5+2i = -i+2i = i.$$

1.2 Намерете реалните числа x и y, за които е изпълнено

$$(1-i).x+(-2+5i).y = -1+7i$$

Решение: Извършваме означените действия и получаваме

$$(x-2y)+(-x+5y)i = -1+7i$$

Като приравним съответно реалните и имагинерните части на числата, стоящи от двете страни на равенството, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rcr} x-2y & = & -1 \\ -x+5y & = & 7 \end{array}\right.$$

Решаваме тази система от две линейни уравнения с две неизвестни и получаваме $x=3$ и $y=2$.

1.3 Решете системата

$$\left|\begin{array}{rcrcr} (1-i)z_1 & + & (2+i)z_2 & = & 8+5i \\ (2-i)z_1 & - & (2+3i)z_2 & = & -4-5i \end{array}\right.$$

Решение: Умножаваме първото уравнение с $(2+3i)$, второто с $(2+i)$ и ги събираме:

$$\Longrightarrow (10+i)z_1 = -2+20i = 2(-1+10i)$$

$$\Longrightarrow z_1 = 2\frac{-1+10i}{10+i} = 2\frac{(-1+10i)(10-i)}{101} = 2\frac{101i}{101} = 2i$$

Заместваме намерената стойност на z_1 в първото уравнение и получаваме:

$$z_2 = \frac{6+3i}{2+i} = \frac{3(2+i)}{(2+i)} = 3.$$

1.4 Представете в тригонометричен вид числата

$$1,\ 3,\ -2,\ -5,\ i,\ 5i,\ -i,\ -3i.$$

Решение: Положителните реални числа имат аргумент 0, отрицателните реални числа имат аргумент π. Чисто имагинерните числа с положителна имагинерна част имат аргумент $\frac{\pi}{2}$, а чисто имагинерните числа с отрицателна имагинерна част имат аргумент $\frac{3\pi}{2}$. Следователно:

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) \qquad 3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) \qquad -5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \qquad 5i = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$-i = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) \qquad -3i = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

При решаването на следващите задачи ще е полезна следната таблица:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.5 Представете в тригонометричен вид числата

а) $1+i$ б) $-1+i$ в) $1+i\sqrt{3}$

г) $\sqrt{3}+i$ д) $-1+i\sqrt{3}$ е) $-\sqrt{3}-i$

ж) $1-i$ з) $\sqrt{3}-i$ и) $-2-2i$

Решение:

а) За да напишем тригонометричния вид на комплексното число $z = 1+i$ трябва да пресметнем неговия модул и аргумент. Числото $z = 1+i$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

От условието $tg\,\theta = \dfrac{y}{x} = 1$ не можем да определим еднозначно аргумента θ, но тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \quad 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

б) Числото $z = -1+i$ има реална част $x = -1$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$tg\,\theta = -1$ и тъй като числото лежи във втори квадрант, следва че $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \quad -1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

в) Числото $z = 1+i\sqrt{3}$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = \sqrt{3}$. Следователно

$$r = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

$tg\,\theta = \sqrt{3}$ и тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

$$\Longrightarrow \quad 1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

г) Числото $z = \sqrt{3} + i$ има реална част $x = \sqrt{3}$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$tg\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

д) Числото $z = -1 + i\sqrt{3}$ има реална част $x = -1$ и имагинерна част $y = \sqrt{3}$. Следователно

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$tg\,\theta = -\sqrt{3}$ и тъй като числото лежи във втори квадрант, следва че $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\Longrightarrow \quad -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

е) Числото $z = -\sqrt{3} - i$ има реална част $x = -\sqrt{3}$ и имагинерна част $y = -1$. Следователно

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$tg\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в трети квадрант, следва че $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \quad -\sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$

ж) Числото $z = 1 - i$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = -1$. Следователно

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$tg\,\theta = -1$ и тъй като числото лежи в четвърти квадрант, следва че $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \quad 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$

з) Числото $z = \sqrt{3} - i$ има реална част $x = \sqrt{3}$ и имагинерна част $y = -1$. Следователно

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$tg\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в четвърти квадрант, следва че $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \quad -\sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$$

и) Числото $z = -2 - 2i$ има реална част $x = -2$ и имагинерна част $y = -2$. Следователно

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$tg\,\theta = 1$ и тъй като числото лежи в трети квадрант, следва че $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \quad -2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$$

1.6 Намерете решението на уравнението

$$(i - z).(1 + 2i) + (1 - iz).(3 - 4i) = 1 + 7i$$

и го запишете в алгебричен и тригонометричен вид.

Решение: Извършваме означените действия и получаваме:

$$-(5 + 5i)z + 1 - 3i = 1 + 7i$$

$$\Longrightarrow \quad -(5 + 5i)z = 10i$$

$$\Longrightarrow \quad z = -\frac{10i}{5 + 5i} = -2\frac{i}{1 + i} = -2\frac{i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = -2\frac{1 + i}{2} = -1 - i$$

Комплексното число $z = -1 - i$ има модул $r = \sqrt{2}$ и аргумент $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$.

$$\Longrightarrow \quad z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}).$$

1.7 Извършете означените действия.

а) $(1 + i)^{12}$ б) $\dfrac{(\sqrt{3} + i)^{15}}{(1 + i)^{10}}$

в) $\sqrt[5]{i}$ г) $\sqrt[4]{1 - i}$

Решение:

а) Представяме числото в тригонометричен вид и прилагаме формулата на Моавър.

$$(1 + i)^{12} = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right]^{12} = 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -64$$

б) Представяме числата в тригонометричен вид, прилагаме формулата на Моавър и извършваме делението.

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^{15}}{(1 + i)^{10}} = \frac{[2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})]^{15}}{[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{10}} = \frac{2^{15}(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})}{2^5(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})} = 2^{10} = 1024$$

в) Представяме числото i в тригонометричен вид и прилагаме формула (1.14).

$$\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1(cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = (cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

г) Представяме числото $1-i$ в тригонометричен вид и прилагаме формула (1.14).

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{\sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})}=\sqrt[8]{2}(cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4})\quad k=0,1,2,3.$$

1.8 Решете уравненията и намерете тези решения, които лежат в указаната област.

а) $z^6-1=0$ $\qquad \arg z\in[0,\pi]$

б) $z^6+27=0$ $\qquad \arg z\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

в) $z^4+1=0$ $\qquad |z-1|\leq 1$

Решение:

а)

$$\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1(cos\,0+i\sin\,0)}=(cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3})\qquad k=0,1,2,3,4,5.$$

Търсените решения се получават от горната формула при $k=0,1,2,3$

б)

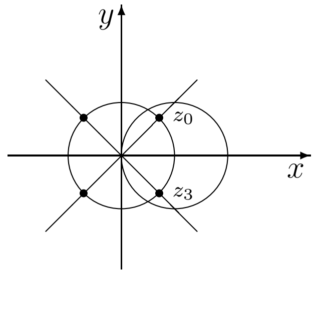
$$\sqrt[6]{-27}=\sqrt[6]{27(cos\,\pi+i\sin\,\pi)}=\sqrt{3}(cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6})\qquad k=0,1,2,3,4,5.$$

Търсените решения се получават от горната формула при $k=0$ и $k=5$.

в)

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1(cos\,\pi+i\sin\,\pi)}=(cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})\qquad k=0,1,2,3.$$

Търсените решения се получават от горната формула при $k=0$ и $k=3$. В това можем да се убедим със следните геометрични съображения:



1. Условието $|z-1|\leq 1$ задава единичен кръг с център точката с координати $(1,0)$.

2. Четирите стойности на корена лежат на централна единична окръжност във върховете на квадрат с диагонали ъглополовящите на първи-трети и втори-четвърти квадрант.

Следователно в единичния кръг с център $(1,0)$ лежат само двата корена, лежащи в първи и четвърти квадрант. Наистина, при $k=0$ коренът $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

лежи в този кръг, защото

$$|z_0 - 1| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right| =$$

$$= \left|(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} < 1$$

Аналогично се проверява и за другия корен (или от съображения за симетрия).

1.9 Решете уравненията:

а) $x^2 + 7 - 24i = 0$

б) $x^2 - (2+i)x + 7i - 1 = 0$

Решение:

а) $x^2 + 7 - 24i = 0 \iff x^2 = -7 + 24i$

Нека $x = a + bi$. Тогава $x^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$

Следователно

$$a^2 - b^2 + 2abi = -7 + 24i$$

Приравнявайки реалните и имагинерните части на числата, стоящи от двете страни на горното равенство, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -7 \\ ab = 12 \end{array} \right.$$

Решаваме тази система и получаваме $a = 3,\ b = 4$ или $a = -3,\ b = -4.$

Следователно решенията са

$$x_{1,2} = \pm(3 + 4i).$$

б) Квадратното уравнение $x^2 - (2+i)x + 7i - 1 = 0$ решаваме чрез познатата ни формула

$$x_{1,2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{4 + 4i - 1 + 4 - 28i}}{2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{7 - 24i}}{2}$$

Пресмятаме $\sqrt{7 - 24i}$ по начина от точка а) и получаваме

$$x_{1,2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{7 - 24i}}{2} = \frac{2 + i \pm (4 - 3i)}{2}$$

Следователно $x_1 = 3 - i,\ \ x_2 = -1 + 2i.$

Задачи за самостоятелна работа:

1.10 Извършете означените действия и резултата запишете в алгебричен вид.

а) $(3+4i)(4-i)$ отг. $16+13i$

б) $(2+3i)(3-i)(1+i)-2i$ отг. $2+14i$

в) $(1-2i)(2+i)^2+5i$ отг. $11+3i$

г) $\dfrac{2-i}{1+2i}$ отг. $-i$

д) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$ отг. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

е) $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}$ отг. $\dfrac{5}{17}-\dfrac{3}{17}i$

1.11 Намерете реалните числа x и y, за които е изпълнено

$$12[(2x+i).(1+i)+(x+y)(3-2i)]=17+6i.$$

отг. $x=\dfrac{1}{3},\quad y=\dfrac{1}{4}$

1.12 Решете системата

$$\left|\begin{array}{rcrcl} z_1 & + & 2z_2 & = & 1+i \\ 3z_1 & + & iz_2 & = & 2-3i \end{array}\right.$$

отг. $z_1=1-i$, $z_2=i$

1.13 Представете в тригонометричен вид числата и ги изобразете като точки в комплексната равнина.

а) -8 отг. $8(\cos\pi+i\sin\pi)$

б) $-10i$ отг. $10(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})$

в) $-2+2\sqrt{3}i$ отг. $4(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

г) $-\sqrt{3}i-1$ отг. $2(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3})$

1.14 Извършете означените действия и резултата изобразете в комплексната равнина.

а) $(1-i)^{12}$ отг. -64

б) $\dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{30}}{(1-i)^{12}}$ отг. 2^{24}

в) $\sqrt[5]{i-1}$ отг. $\sqrt[10]{2}(\cos\dfrac{3\pi+8k\pi}{20}+i\sin\dfrac{3\pi+8k\pi}{20})\quad k=0,1,2,3,4$

г) $\sqrt[4]{-1-i}$ отг. $\sqrt[8]{2}(\cos\dfrac{5\pi+8k\pi}{16}+i\sin\dfrac{5\pi+8k\pi}{16})\quad k=0,1,2,3$

1.15 Решете уравненията. Намерете тези решения, които лежат в указаната област и ги изобразете.

а) $z^4+16=0,\qquad argz\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ отг. $2(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

б) $z^3-27=0,\qquad argz\in[0,\pi]$ отг. $3(\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3})\quad k=0,1.$

в) $z^6-1=0,\qquad |z-1|\le\sqrt{2}$ отг. $\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3}\quad k=0,1,5.$

1.16 Решете уравненията:

а) $x^2-3+4i=0$ отг. $x_{1,2}=\pm(2-i)$

б) $x^2-(8+3i)x+13(1+i)=0$ отг. $x_1=5+i,\quad x_2=3+2i$

Глава 2

Полиноми

Целта на тази глава е да запознае читателя с рационалните функции. В нея ще разширите своите знания за полиномите (многочлените) и ще научите как се разлага правилна рационална функция на сума от елементарни дроби. След усвояване на материала вие ще можете да делите два полинома, да прилагате схемата на Хорнер, да решавате някои алгебрични уравнения с цели коефициенти, да разлагате правилна рационална функция на сума от елементарни дроби.

Полином (многочлен) се нарича функцията

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0 \tag{2.1}$$

Числата a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ се наричат **коефициенти** на полинома и могат да бъдат реални или комплексни. Коефициентът a_n се нарича **старши коефициент,** а коефициентът a_0 – **свободен член.**

Функция от вида ax^k се нарича **едночлен**. Ако $a \neq 0$ степента на едночлена е k. Следователно полиномите са сума от едночлени.

Най-високата от степените на едночлените се нарича **степен на полинома**. Степента на полинома $f(x)$ се означава с $deg\, f(x)$.

Два полинома се наричат **тъждествено равни,** ако приемат едни и същи стойности за всяка стойност на променливата x.

Теорема 2.1 *Необходимо и достатъчно условие два полинома да са тъждествено равни е коефициентите пред съответните степени да са равни.*

Уравнението $f(x) = 0$ се нарича **алгебрично уравнение** от $n-$та степен.

Всяко число x_0, за което е изпълнено $f(x_0) = 0$, се нарича **нула на полинома** $f(x)$ или **корен на уравнението** $f(x) = 0$.

От училищния курс по математика е известно, че сумата, разликата и произведението на два полинома е пак полином. Следващата теорема показва, че резултатът от делението на два полинома не винаги е полином.

Теорема 2.2 *За всеки два полинома* $f(x)$ *и* $g(x) \not\equiv 0$ *съществува единствена двойка полиноми* $q(x)$ *и* $r(x)$ *, за които е изпълнено*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \tag{2.2}$$

като степента на полинома $r(x)$ *е по-малка от степента на* $g(x)$.

Полиномът $q(x)$ се нарича **частно**, а $r(x)$ - **остатък.** Когато $r(x) \equiv 0$ казваме, че полиномът $f(x)$ се дели на полинома $g(x)$ **без остатък.**

Пример 2.1 Да се раздели $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3x^2 - x + 1$ на $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Решение:

Полиномът $f(x)$ се нарича делимо, а полиномът $g(x)$ делител. Първо ще изложим схемата, по която се извършва делението на два полинома, а след това ще я обясним.

$$
\begin{array}{lll}
 & 2x^5 - 5x^4 + 0x^3 + 3x^2 - x + 1 & \mid \underline{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\
- & & \\
 & \underline{2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} & 2x^2 - x \ = \ q(x) \\
 & \qquad - x^4 + 2x^3 - x^2 - \ x + 1 & \\
- & & \\
 & \qquad \underline{- x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x \qquad} & \\
 & \qquad\qquad\qquad -2x^2 + x + 1 \quad = r(x) &
\end{array}
$$

Следователно

$$\frac{2x^5 - 5x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = 2x^2 - x + \frac{-2x^2 + x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Сега ще обясним как е извършено делението:

1. Полиномите се подреждат по намаляващите степени на едночлените.

2. Разглеждаме едночлените с най-високи степени в делимото и делителя. В нашия пример това са едночлените $2x^5$ и x^3. Пресмятаме с кой едночлен трябва да умножим x^3, за да получим $2x^5$. Това е едночленът $2x^2$. Записваме го под делителя и умножаваме делителя с него. Полученият полином $2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 4x^2$ записваме под делимото и го изваждаме от него. Получаваме полинома $-x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$.

3. От тук нататък повтаряме същите операции като тези в точка втора, но сега делимо е последният получен полином $-x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$.

4. Процесът продължава докато се получи полином от степен строго по-малка от степента на делителя. Този полином е остатъкът $r(x) = -2x^2 + x + 1$, а полиномът, записан под делителя, е частното $q(x) = 2x^2 - x$.

Правило (схема) на Хорнер. Правилото на Хорнер се прилага, когато трябва да се раздели полинома $f(x)$ с двучлена $g(x) = x - a$. Ако $f(x)$ е полином от $n-$та степен и го разделим на двучлена $g(x) = x - a$, то частното $q(x)$ е полином от $(n-1)-$ва степен, а остатъкът $r(x)$ е полином от нулева степен (т.е. число) $r(x) = r$. Чрез схемата на Хорнер лесно се определят коефициентите на частното и остатъка.

Ако
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
и
$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$
то:
$$\begin{cases} b_{n-1} & = & a_n \\ b_{n-2} & = & a_{n-1} + a.b_{n-1} \\ b_{n-3} & = & a_{n-2} + a.b_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 & = & a_2 + a.b_2 \\ b_0 & = & a_1 + a.b_1 \\ r & = & a_0 + a.b_0 \end{cases}$$

При прилагане схемата на Хорнер пресмятанията се оформят в следната таблица:

	a_n	a_{n-1}	....	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a.b_{n-1} + a_{n-1}$	....	$b_0 = a.b_1 + a_1$	$r = a.b_0 + a_0$

На втория ред в тази таблица се получават коефициентите на частното и остатъка. Старшият коефициент на частното винаги е равен на старшия коефициент на делимото. Всички останали числа в този ред се получават по един и същи начин – полученото вече число се умножава с a и се събира с числото от първия ред, стоящо над това което искаме да получим.

Пример 2.2 Да се раздели $x^6 + 3x^5 + x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 2$ на $x + 2$.

Решение:

Тъй като $x + 2 = x - (-2)$, то $a = -2$.

	1	3	1	-3	4	-1	-2
$a = -2$	1	1	-1	-1	6	-13	$24 = r$

Следователно
$$\frac{x^6 + 3x^5 + x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 2}{x + 2} = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 6x - 13 + \frac{24}{x + 2}$$

Следващата теорема е известна като теорема на Безу.

Теорема 2.3 *Остатъкът от делението на полинома* $f(x)$ *с двучлена* $g(x) = x - a$ *е равен на стойността на полинома* $f(x)$ *за* $x = a$ *т.е.* $r = f(a)$.

Доказателство: От Теорема 2.2 следва, че
$$f(x) = q(x)(x - a) + r$$
Заместваме в това равенство $x = a$ и получаваме $f(a) = q(a).0 + r = r$. ■

Следствие 2.1 *Числото a е нула на полинома $f(x)$ тогава и само тогава, когато $f(x)$ се дели на $x-a$ без остатък.*

Пример 2.3 Да се пресметне $f(-3)$, ако $f(x) = 3x^7 - x^6 + 2x^4 - 64x^3 + x - 1$.

Решение: За да пресметнем $f(-3)$ прилагаме теоремата на Безу и използваме схемата на Хорнер.

	3	-1	0	2	-64	0	1	-1
$a=-3$	3	-10	30	-88	200	-600	1801	$-5404 = f(-3)$

Обърнете внимание на това, че когато липсват някои степени в полинома и прилагаме схемата на Хорнер, то на местата на липсващите степени записваме **нули.**

Ако $f(x) = (x-a)^k.g(x)$ и $g(a) \neq 0$, то числото a се нарича $k-$**кратна нула** на $f(x)$.

Теорема 2.4 ***(Основна теорема на алгебрата - Гаус)*** *Всеки полином от ненулева степен има поне една нула в множеството на комплексните числа.*

От основната теорема следва, че всеки полином от $n-$та степен има n на брой нули в множество на комплексните числа, ако всяка нула се брои толкова пъти, колкото е нейната кратност.

Ако $x_1, x_2, \ldots, x_m \quad (m \leq n)$ са нулите на полинома от $n-$та степен $f(x)$ с кратности съответно $k_1, k_2, \ldots, k_m \quad (k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n)$, то $f(x)$ може да се представи във вида

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m} \tag{2.3}$$

Теорема 2.5 *Ако един полином*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

с цели коефициенти има рационална нула

$$x = \frac{p}{q} \qquad (p,\ q\ -\ \textit{взаимно прости цели числа}),$$

то p е делител на a_0, а q е делител на a_n.

Доказателство: От това, че $x = \dfrac{p}{q}$ е нула на полинома $f(x)$ следва

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Следователно

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Тъй като изразът $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1}$ се дели на p, то следва че p трябва да дели a_0q^n. Но p не дели q^n и следователно е делител на a_0.

Аналогично изразът $a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n$ се дели на q. Следователно q трябва да дели a_np^n. Но q не дели p^n и следователно е делител на a_n. ■

Пример 2.4 Намерете нулите на полинома $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2$.

Решение:

Тъй като полиномът е с цели коефициенти, можем да приложим Теорема 2.5 и да търсим рационални нули $x = \frac{p}{q}$ на този полином.

$$p \text{ дели } 2 \quad \Longrightarrow \quad p = \pm1, \pm2$$

$$q \text{ дели } 3 \quad \Longrightarrow \quad q = \pm1, \pm3$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{p}{q} = \pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3}$$

Сега задачата ни е да проверим дали някое от тези 8 числа е нула на полинома. Удобно е това да се направи чрез схемата на Хорнер. Не бива да забравяме и факта, че всяка от получените от нас нули може да бъде евентуално кратна нула. Избираме едно от горните числа, например $x = -2$, и прилагаме схемата на Хорнер.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$

Тъй като остатъкът е нула, следва че $x_1 = -2$ е нула на полинома. Следователно

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = (x+2)(3x^4 - x^3 - 3x + 1)$$

Ако $x_1 = -2$ е двукратна нула на полинома $f(x)$, то $x + 2$ трябва да дели частното $q(x) = 3x^4 - x^3 - 3x + 1$. За да проверим това, прилагаме пак схемата на Хорнер с $a = -2$ за полинома $q(x)$. Неговите коефициенти са последните получени коефициенти и да напомним, че остатъкът в този ред е нула. Затова продължаваме таблицата с още един ред.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$
$a = -2$	3	-7	14	-31	63		не	

Полученият остатък не е нула. Следователно $x_1 = -2$ не е двукратна нула.

Избираме едно от останалите числа, например $x = 1$, и прилагаме пак схемата на Хорнер. Ако $x = 1$ е нула на полинома $f(x)$, то $x - 1$ трябва да дели $f(x)$ без остатък и тъй като не дели $x + 2$, то трябва да дели без остатък полинома $q(x)$. Затова прилагаме схемата на Хорнер, но за полинома $q(x)$, т.е. при следващите пресмятания работим с последните коефициенти, при които остатъкът е бил нула. В нашата таблица това е последният от редовете, на който пише "да". За избягване на грешки е удобно редът, в който остатъкът не е нула ("не") да се задраска.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a=-2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1=-2$
$a=-2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a=1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2=1$

Тъй като остатъкът е нула, следва че $x_2 = 1$ е нула на полинома. Следователно

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = (x+2)(3x^4 - x^3 - 3x + 1) =$$

$$= (x+2)(x-1)(3x^3 + 2x^2 + 2x - 1)$$

Ако $x_2 = 1$ е двукратна нула на полинома $f(x)$, то $x-1$ трябва да дели новото частно $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$. За да проверим това, прилагаме пак схемата на Хорнер с $a = 1$ за полинома $p(x)$.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a=-2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1=-2$
$a=-2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a=1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2=1$
$a=1$	3	5	7	6			не	

Полученият остатък не е нула. Следователно $x_2 = 1$ не е двукратна нула.

Избираме едно от останалите числа, например $x = \frac{2}{3}$, и продължаваме по описания вече начин.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a=-2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1=-2$
$a=-2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a=1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2=1$
$a=1$	3	5	7	6			не	
$a=\frac{2}{3}$	3	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{19}{9}$			не	

Полученият остатък не е нула. Следователно $x = \frac{2}{3}$ не е нула на полинома.

Избираме едно от останалите числа, например $x = \frac{1}{3}$, и отново прилагаме описаната вече схема.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a=-2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1=-2$
$a=-2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a=1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2=1$
$a=1$	3	5	7	6			не	
$a=\frac{2}{3}$	3	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{19}{9}$			не	
$a=\frac{1}{3}$	3	3	3	0			да	$x_3=\frac{1}{3}$

Следователно

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = (x+2)(3x^4 - x^3 - 3x + 1) =$$

$$= (x+2)(x-1)(3x^3+2x^2+2x-1) = (x+2)(x-1)(x-\frac{1}{3})(3x^2+3x+3) =$$

$$= 3(x+2)(x-1)(x-\frac{1}{3})(x^2+x+1)$$

Последните две нули на полинома са нули на квадратния тричлен x^2+x+1.

$$\Longrightarrow \qquad x_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

С това задачата е решена.

Нека

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

е полином с **реални коефициенти.** Тогава, ако $x_0 = a+ib$ е нула на $f(x)$, то и $\overline{x}_0 = a-ib$ е също нула на $f(x)$, при това x_0 и $\overline{x}_0$ имат една и съща кратност.

Ако в разлагането на $f(x)$ обединим множителите с комплексно-спрегнатите нули, то $f(x)$ ще се разложи на линейни множители и квадратни тричлени с реални коефициенти.

Извод: Всеки полином с реални коефициенти може да се разложи на произведение от линейни множители и квадратни тричлени с реални коефициенти.

Разлагане на рационална функция на сума от елементарни дроби.

Функция от вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми, се нарича **рационална функция.** Ако степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя, рационалната функция се нарича **правилна.**

Рационални функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad \text{и} \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \qquad (p^2-4p<0)$$

се наричат **елементарни дроби** от съответно **първи** и **втори** вид.

Всяка правилна рационална функция (правилна дроб) може да се представи във вида

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k \ldots (x^2+px+q)^m \ldots} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)} +$$

$$+ \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \cdots + \frac{M_m x + N_m}{x^2+px+q} + \cdots \qquad (2.4)$$

Последната формула трябва да се разбира по следния начин:

1. Знаменателят $g(x)$ на правилната дроб е разложен на линейни множители и квадратни тричлени на съответни степени.

2. На всеки линеен множител от знаменателя на правилната дроб отговаря сума от толкова елементарни дроби от първи вид, колкото е степента на линейния множител; степените в знаменателите на елементарните дроби намаляват с единица.

3. На всеки квадратен тричлен от знаменателя на правилната дроб отговаря сума от толкова елементарни дроби от втори вид, колкото е степента на квадратния тричлен; степените в знаменателите на елементарните дроби също намаляват с единица.

Пример 2.5 Да се разложи на сума от елементарни дроби функцията:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Решение:

Дробта е правилна. Тъй като знаменателят е разложен на един линеен множител на втора степен и един квадратен тричлен на първа степен, то дробта се разлага на сума от две елементарни дроби от първи вид и една от втори вид.

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

За да определим неизвестните коефициенти, можем да постъпим по няколко начина:

Първи начин

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите (общият знаменател е написан в знаменателя на правилната дроб).
Получаваме

$$x^3 = A(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2 \tag{2.5}$$

или

$$x^3 = (B+C)x^3 + (A-B-2C+D)x^2 + (B+C-2D)x + (A-B+D) \tag{2.6}$$

Приравняваме коефициентите пред съответните степени в равенството (2.6) (виж Теорема 2.1) и получаваме следната система от четири линейни уравнения с четири неизвестни:

$$\left|\begin{array}{rcl} B + C & = & 1 \\ A - B - 2C + D & = & 0 \\ B + C - 2D & = & 0 \\ A - B + D & = & 0 \end{array}\right.$$

Решаваме тази система и получаваме

$$A=\frac{1}{2},\quad B=1,\quad C=0,\quad D=\frac{1}{2}$$

Следователно

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x^2+1)}$$

Втори начин

По-удобно е обаче (вместо да решаваме система линейни уравнения) коефициентите да се определят, като използваме нулите на знаменателя и ги заместваме в основното равенство (2.5).
При $x=1$ получаваме

$$1=2A\quad\Longrightarrow\quad A=\frac{1}{2}$$

При $x=i$ получаваме

$$\begin{aligned} i^3&=(Ci+D)(i-1)^2\\ -i&=(Ci+D)(-2i)\\ -i&=2C-2Di \end{aligned}$$

Две комплексни числа са равни, ако са равни съответно реалните и имагинерните им части.
Следователно

$$\left|\begin{array}{lcl} 2C & = & 0\\ -2D & = & -1 \end{array}\right.\qquad\Longrightarrow\qquad C=0,\qquad D=\frac{1}{2}$$

Заместваме намерените стойности на A, C и D в основното равенство (2.5) и получаваме

$$x^3=\frac{1}{2}(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+\frac{1}{2}(x-1)^2 \tag{2.7}$$

Сега при $x=0$ от (2.7) получаваме $0=\frac{1}{2}-B+\frac{1}{2}$. Следователно $B=1$.

Забележка:
При задачи, в които трябва да определяме голям брой неизвестни коефициенти и е сравнително трудно да използваме комплексните корени на квадратните тричлени, можем да комбинираме двата начина. Ако приложим първия начин, ще трябва да решаваме линейна система с много неизвестни. Затова започваме по втория начин и определяме известен брой неизвестни коефициенти. След това ги заместваме в основното тъждество, разкриваме скобите, приравняваме коефициентите пред равните степени и получаваме линейна система. Тази система е вече с много по-малко неизвестни.

ЗАДАЧИ

2.1 Да се извършат действията:

а) $(x^3+x^2-2x+1)(x^2-x-1)+x^4-2x$

б) $\dfrac{2x^4-3x^3+4x^2-5x+6}{x^2-3x+1}$

в) $\dfrac{x^4-3x^3+4x^2-6x+8}{x-1}$

г) Ако $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$ и $g(x)=x+4$

намерете $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $f(-4)$

д) $\dfrac{x^7+2x^4-3x^6-x^2+x+1}{x+2}$

е) $\dfrac{x^6+7x^4+16x^3+8x^2-16x-112}{x+2}$

Решение:

а) Умножаваме полиномите в скобите (т.н. разкриване на скоби), правим приведение и получаваме

$$(x^3+x^2-2x+1)(x^2-x-1)+x^4-2x=x^5-x^4-x^3+x^4-x^3-x^2-2x^3+2x^2+2x+$$
$$x^2-x-1+x^4-2x=x^5+x^4-4x^3+2x^2-x-1$$

б) Делението на полиноми извършваме по познатата ни схема от пример 2.1.

$$\begin{array}{lll}
 & 2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 & |\ \underline{x^2-3x+1} \\
- & \underline{2x^4-6x^3+2x^2} & 2x^2+3x+11 \ = \ q(x) \\
 & \quad 3x^3+2x^2-\ 5x+6 & \\
- & \quad \underline{3x^3-9x^2+\ 3x} & \\
 & \qquad 11x^2-8x+\ 6 & \\
- & \qquad \underline{11x^2-33x+11} & \\
 & \qquad\qquad 25x-5=r(x) &
\end{array}$$

Следователно

$$\frac{2x^4-3x^3+4x^2-5x+6}{x^2-3x+1}=2x^2+3x+11+\frac{25x-5}{x^2-3x+1}$$

в) Тъй като делим с двучлена $g(x)=x-1$, ще приложим схемата на Хорнер с $a=1$ (Пример 2.2).

	1	-3	4	-6	8
$a=1$	1	-2	2	-4	$4=r$

Следователно

$$\frac{x^4-3x^3+4x^2-6x+8}{x-1}=x^3-2x^2+2x-4+\frac{4}{x-1}$$

г) Тъй като делим с двучлена $g(x)=x+4$, ще приложим отново схемата на Хорнер с $a=-4$ и теоремата на Безу.

	1	-3	6	-10	16
$a=-4$	1	-7	34	-146	$600=r=f(-4)$

Следователно

$$\frac{x^4-3x^3+6x^2-10x+16}{x+4}=x^3-7x^2+34x-146+\frac{600}{x+4}$$

д) Тъй като полиномът, който делим, не е подреден по намаляващите степени на променливата, то в схемата на Хорнер ще подредим коефициентите и където липсва степен на x, пишем нула.

	1	-3	0	2	0	-1	1	1
$a=-2$	1	-5	10	-18	36	-73	147	-293

Следователно

$$\frac{x^7-3x^6+2x^4-x^2+x+1}{x+2}=x^6-5x^5+10x^4-18x^3+36x^2-73x+147-\frac{293}{x+2}$$

е) Прилагаме схемата на Хорнер, като на мястото на липсващите степени на x пишем нули.

	1	0	7	16	8	-16	-112
$a=-2$	1	-2	11	-6	20	-56	0

Следователно

$$x^6+7x^4+16x^3+8x^2-16x-112=(x+2)(x^5-2x^4+11x^3-6x^2+20x-56)$$

2.2 Определете дали числото a е нула на полинома $f(x)$ и от каква кратност.

а) $f(x)=x^6-x^5-11x^4+13x^3+26x^2-20x-24$ $\quad$ а = –1

б) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ $\quad$ а = 2

Решение:

а) Прилагаме схемата на Хорнер, докато получим остатък, различен от нула (пример 2.4).

	1	-1	-11	13	26	-20	-24
$a=-1$	1	-2	-9	22	4	-24	0
$a=-1$	1	-3	-6	28	-24	0	
$a=-1$	1	-4	-2	30	-54		

Следователно числото $a=-1$ е двукратна нула на полинома и

$$x^6-x^5-11x^4+13x^3+26x^2-20x-24=(x+1)^2(x^4-3x^3-6x^2+28x-24)$$

б) Аналогично

	1	-5	7	-2	4	-8
$a=2$	1	-3	1	0	4	0
$a=2$	1	-1	-1	-2	0	
$a=2$	1	1	1	0		
$a=2$	1	3	7			

Следователно числото $a=2$ е трикратна нула на полинома и

$$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=(x-2)^3(x^2+x+1)$$

2.3 Решете уравненията:

а) $2x^3+5x^2-23x+10=0$

б) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$

Решение:

а) При решаването на тази задача ще следваме пример 2.4.

$$p \text{ дели } 10 \quad \Longrightarrow \quad p=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$$

$$q \text{ дели } 2 \quad \Longrightarrow \quad q=\pm1,\pm2$$

$$\Longrightarrow \quad x=\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{5}{2}$$

Избираме числата 2, -5, $\frac{1}{2}$ и използваме схемата на Хорнер.

	2	5	-23	10	корен
$a=2$	2	9	-5	0	$x_1=2$
$a=2$	2	13	21		не
$a=-5$	2	-1	0		$x_2=-5$
$a=\frac{1}{2}$	2	0			$x_3=\frac{1}{2}$

От таблицата се вижда, че $x_1=2$ не е двоен корен и затова при проверката със следващото число -5 пресмятанията извършваме с последния, преди това получен ред, на който остатъкът е нула.

б) Аналогично

$$p \text{ дели } 9 \quad \Longrightarrow \quad p = \pm 1, \pm 3, \pm 9$$
$$q \text{ дели } 1 \quad \Longrightarrow \quad q = \pm 1$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9$$

Забелязваме, че ако старшият коефициент е единица, то възможните рационални корени са цели. Избираме числото 1 и използваме схемата на Хорнер.

	1	4	-2	-12	9	корен
$a = 1$	1	5	3	-9	0	$x_1 = 1$
$a = 1$	1	6	9	0		$x_2 = 1$

От таблицата се вижда, че числото едно е двукратен корен и че уравнението може да се представи по следния начин

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x-1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0$$
$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x-1)^2(x+3)^2 = 0$$

Следователно $x_{3,4} = -3$.

2.4 Разложете на линейни множители полиномите:

а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

б) $x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 20x - 12$

Решение:

а) Ако намерим нулите на даден полином, лесно ще го разложим на множители. Тъй като коефициентите са цели числа, можем да приложим теорема 2.5.

$$p \text{ дели } 6 \quad \Longrightarrow \quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$
$$q \text{ дели } 1 \quad \Longrightarrow \quad q = \pm 1$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

	1	-6	11	-6	нули на полинома
$a = 1$	1	-5	6	0	$x_1 = 1$

От таблицата се вижда, че числото $x_1 = 1$ е нула на полинома.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Корените на квадратния тричлен $x^2 - 5x + 6$ са $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

б) Аналогично

$$p \text{ дели } 12 \quad \Longrightarrow \quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$
$$q \text{ дели } 1 \quad \Longrightarrow \quad q = \pm 1$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

	1	4	-2	-16	5	20	-12	нули на полинома
$a=1$	1	5	3	-13	-8	12	0	$x_1=1$
$a=1$	1	6	9	-4	-12	0		$x_2=1$
$a=1$	1	7	16	12	0			$x_3=1$
$a=1$	1	8	24	36				не
$a=-3$	1	4	4	0				$x_4=-3$

Следователно

$$x^6+4x^5-2x^4-16x^3+5x^2+20x-12=(x-1)^3(x+3)(x^2+4x+4)$$

$$x^6+4x^5-2x^4-16x^3+5x^2+20x-12=(x-1)^3(x+3)(x+2)^2$$

2.5 Разложете на множители с реални коефициенти полиномите:

а) x^4+4

б) x^6+27

Решение:

а) Полиномът x^4+4 няма реални нули и затова не може в разлагането си да има реални линейни множители.

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

Използваме формулата

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

б) Аналогично

$$x^6+27=(x^2)^3+3^3=(x^2+3)(x^4-3x^2+9)$$

Тук използвахме формулата за съкратено умножение

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\Longrightarrow \qquad x^6+27=(x^2+3)(x^4-3x^2+9)=(x^2+3)(x^4+6x^2+9-9x^2)$$

Но

$$x^4+6x^2+9-9x^2=(x^2+3)^2-(3x)^2=(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$$

Следователно

$$x^6+27=(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$$

2.6 Разложете полинома $x^4-2x^3+3x^2-4x+5$ по степените на $x-3$.

Решение:

За да разложим даден полином по степените на $x-a$, правим следното:

– Делим дадения полином на $x-a$ чрез схемата на Хорнер. Полученият остатък е свободният член в подреждането по степените на $x-a$.

– Делим частното от предната стъпка на $x-a$ чрез схемата на Хорнер. Полученият втори остатък е коефициентът пред $(x-a)$ в разлагането по степените на $x-a$.
– Делим новото частно на $x-a$ чрез схемата на Хорнер. Полученият трети остатък е коефициентът пред $(x-a)^2$ в подреждането по степените на $x-a$ и т.н.
– Коефициентът пред най-високата степен на $x-a$ в разлагането е равен на старшия коефициент на полинома.

	1	-2	3	-4	5
$a=3$	1	1	6	14	47 1-ви остатък
$a=3$	1	4	18	68 2-ри остатък	
$a=3$	1	7	39 3-ти остатък		
$a=3$	1	10 4-ти остатък			
$a=3$	1				

Следователно

$$x^4-2x^3+3x^2-4x+5=(x-3)^4+10(x-3)^3+39(x-3)^2+68(x-3)+47$$

2.7 Да се определят a и b така, че уравнението

$$x^5-4x^4-3x^3+22x^2+ax+b=0$$

да има двукратен корен $x=2$.

Решение:

За да бъде числото $x=2$ двукратен корен на даденото уравнение, трябва като приложим схемата на Хорнер за полинома $x^5-4x^4-3x^3+22x^2+ax+b$ и за първото частно, получените остатъци да са нули. Следователно

	1	-4	-3	22	a	b
$a=2$	1	-2	-7	8	$a+16$	$b+2a+32=0$
$a=2$	1	0	-7	-6	$a+4=0$	

Получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rcr} 2a+b & = & -32 \\ a+4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Следователно $a=-4, \qquad b=-24.$

2.8 Да се разложат на елементарни дроби функциите:

а) $\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

б) $\dfrac{9-7x}{x(x+1)(x-3)^2}$

в) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$

Решение:

а) Дробта е правилна. Тъй като знаменателят е разложен на три линейни множителя, то дробта се разлага на сума от три елементарни дроби от първи вид.

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите.

Получаваме

$$x^2+2x+6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2) \tag{2.8}$$

От равенството (2.8) при $x=1$ получаваме $9=3A \quad \Longrightarrow \quad A=3.$
При $x=2$ получаваме $14=-2B \quad \Longrightarrow \quad B=-7.$
При $x=4$ получаваме $30=6C \quad \Longrightarrow \quad C=5.$

Следователно

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4.}$$

б) Аналогично (виж пример 2.5)

$$\frac{9-7x}{x(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{x-3}$$

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите. Получаваме

$$9-7x = A(x+1)(x-3)^2 + Bx(x-3)^2 + Cx(x+1) + Dx(x+1)(x-3) \tag{2.9}$$

От равенството (2.9) при $x=0$ получаваме $9=9A \quad \Longrightarrow \quad A=1.$
При $x=-1$ получаваме $16=-16B \quad \Longrightarrow \quad B=-1.$
При $x=3$ получаваме $-12=12C \quad \Longrightarrow \quad C=-1.$

Заместваме намерените стойности на A, B и C в основното равенство (2.9) и получаваме

$$9-7x = (x+1)(x-3)^2 - x(x-3)^2 - x(x+1) + Dx(x+1)(x-3) \tag{2.10}$$

От равенството (2.10) при $x=1$ получаваме $D=0$. Следователно

$$\frac{9-7x}{x(x+1)(x-3)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x-3)^2.}$$

в) Първо разлагаме знаменателя на множители.

$$x^4-16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Следователно

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4.}$$

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите. Получаваме

$$x^2 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2) \tag{2.11}$$

От равенството (2.11) при $x = 2$ получаваме $4 = 32A \implies A = \frac{1}{8}$.

При $x = -2$ получаваме $4 = -32B \implies B = -\frac{1}{8}$.

Заместваме намерените стойности на A и B в основното равенство (2.11) и получаваме

$$x^2 = \frac{1}{8}(x+2)(x^2+4) - \frac{1}{8}(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2) \tag{2.12}$$

Сега при $x = 0$ получаваме $0 = 1 + 1 - 4D \implies D = \frac{1}{2}$.

Заместваме намерените стойности на A, B и D в основното равенство (2.12) и получаваме

$$x^2 = \frac{1}{8}(x+2)(x^2+4) - \frac{1}{8}(x-2)(x^2+4) + (Cx+\frac{1}{2})(x-2)(x+2) \tag{2.13}$$

Сега при $x = 1$ получаваме $C = 0$. Следователно

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4).}$$

Задачи за самостоятелна работа:

2.9 Да се извършат действията:

а) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$ отг. $x^2 - x - 1 + \dfrac{2-5x}{x^2-x+1}$

б) $\dfrac{x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 3}{x - 1}$ отг. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2 + \dfrac{5}{x-1}$

в) $\dfrac{x^6 - 8x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 18}{x - 3}$ отг. $x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x - 6$

2.10 Решете уравненията:

а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ отг. $x_1 = 2 \quad x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{3}$

б) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 = 0$ отг. $x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \quad x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

в) $6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ отг. $x_1 = \dfrac{1}{2} \quad x_2 = \dfrac{1}{3} \quad x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

г) $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0$ отг. няма рационални корени

2.11 Разложете на линейни множители полиномите:

а) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ отг. $(x-1)(x-2)(x-2i)(x+2i)$

б) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ отг. $(x-1)(x+2)(x-3)(x-i)(x+i)$

2.12 Да се разложи полинома $x^3 - x + 1$ по степените на $x - 2$.

отг. $(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 11(x-2) + 7$

2.13 Да се разложат на сума от елементарни дроби функциите:

а) $\dfrac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$ отг. $\dfrac{3}{2(x+1)} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{2(x+3)}$

б) $\dfrac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}$ отг. $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+2}$

в) $\dfrac{1}{x^3-1}$ отг. $\dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$

г) $\dfrac{3x^2}{x^6+27}$ отг. $-\dfrac{1}{3(x^2+3)} + \dfrac{1}{6(x^2+3x+3)} - \dfrac{1}{6(x^2-3x+3)}$

д) $\dfrac{x^3-x+1}{(x-2)^7}$ отг. $\dfrac{1}{(x-2)^4} + \dfrac{6}{(x-2)^5} + \dfrac{11}{(x-2)^6} + \dfrac{7}{(x-2)^7}$

Глава 3

Матрици и детерминанти

Целта на тази глава е да запознае читателя с понятията матрица и детерминанта, действията с матрици, пресмятане на детерминанти и с понятието обратна матрица. След усвояване на материала вие ще умеете: да извършвате действията с матрици; да пресмятате детерминанти от втори, трети ред и по-висок ред, като използвате съответните дефиниции или прилагате целенасочено подходящи свойства на детерминантите; да намирате обратна матрица; да решавате матрични уравнения.

МАТРИЦИ

Матрица се нарича множество от $m.n$ на брой числа, подредени в правоъгълна таблица от m реда и n стълба.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числата a_{ij} се наричат *елементи* на матрицата . Две матрици се наричат **еднотипни**, ако имат съответно равен брой редове и стълбове. **Две матрици са равни**, ако са еднотипни и съответните им елементи са равни.

При $m = n$ матрицата A се нарича **квадратна матрица** от n-ти ред. Елементите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ образуват **главния диагонал** на матрицата. Матрица, която има само един ред се нарича **вектор-ред**, а имаща само един стълб **вектор-стълб**. Под **диагонална матрица** се разбира квадратна матрица, чиито елементи извън главния диагонал са нули. Диагонална матрица, на която елементите по главния диагонал са равни се нарича **скаларна матрица**. Скаларна матрица с диагонални елементи равни на единица се нарича **единична матрица** и се бележи с E. Матрица, на която всички елементи са равни на нула ще наричаме **нулева матрица**.

Сума на две еднотипни матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрицата

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведение на матрицата A с числото λ се нарича матрицата, на която всички елементи са умножени с λ , т.е.

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Нека A е $m\times n$ матрица, а B е $n\times p$ матрица:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix}$$

Произведение на матрицата A **с матрицата** B се нарича матрицата C с m реда и p стълба

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mp} \end{pmatrix}$$

с елементи $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$

$$i=1,2,...,m; \quad j=1,2,...,p$$

Пример 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1.1+(-2).4+2.0 & 1.(-2)+(-2).(-1)+2.3 \\ 0.1+1.4+3.0 & 0.(-2)+1.(-1)+3.3 \\ (-1).1+2.4+2.0 & (-1).(-2)+2.(-1)+2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Произведението на две матрици $A.B$ е дефинирано само тогава, когато броят на стълбовете на първата матрица A е равен на броя на редовете на втората матрица B. Елементите на произведението на две матрици се получават като се умножават редовете на първата матрица със стълбовете на втората.

От следващия пример се вижда, че **комутативният закон не е в сила** при умножението на две матрици, т.е. в общия случай $AB \neq BA$.

Пример 3.2

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 22 & 5 \end{pmatrix}$$

Лесно може да се провери, че скаларните матрици комутират с всяка матрица от същия ред. Единичната матрица е наречена така, защото $E.X = X.E = X$ за всяка матрица X от n-ти ред, т.е. матрицата E играе ролята на числото едно при умножение на матрици.

Нека A е квадратна матрица от ред n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицата

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

редовете на която са стълбовете на A, се нарича **транспонирана** на A.

В сила са следните правила за транспониране:

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda.A)^T = \lambda.A^T, \quad (A.B)^T = B^T.A^T$$

За действията с матрици са в сила следните свойства, при условие че означените операции са изпълними. За квадратните матрици от един и същи ред те винаги са в сила.

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6. $(AB)C = A(BC)$
7. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(A + B)C = AC + BC$

ЗАДАЧИ

3.1. Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, да се преметне $4A - 3B$.

Решение:

$$4A - 3B = 4\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 24 & -4 \\ 0 & -8 & -20 \\ -12 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ -6 & 6 & 9 \\ 12 & -3 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 24 & -16 \\ 6 & -14 & -29 \\ -24 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

3.2. Умножете матриците

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2 + 2.(-1) + 2.1 & 1.3 + 2.4 + 2.2 & 1.1 + 2.0 + 2.(-1) \\ 0.2 + 1.(-1) + 2.1 & 0.3 + 1.4 + 2.2 & 0.1 + 1.0 + 2.(-1) \\ 3.2 + 1.(-1) + 1.1 & 3.3 + 1.4 + 1.2 & 3.1 + 1.0 + 1.(-1) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 6 & 15 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 18 & 30 \\ -5 & 8 & 13 \\ 12 & 29 & 40 \end{pmatrix}$$

3.3. Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и n е естествено число, пресметнете A^n.

Решение:

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ще докажем по индукция, че $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Твърдението е вярно за $n = 1, 2, 3$.

Да допуснем, че то е вярно за $n = k$, т.е. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Тогава

$$A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следователно твърдението е вярно и за $n = k+1$. Съгласно принципа на математическата индукция, твърдението е вярно за всяко естествено число n.

3.4. Ако $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, пресметнете $A.A^T$.

Решение: Имаме

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$A.A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 27 \\ 27 & 27 \end{pmatrix}$$

3.5. Ако $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, да се намери $(A+B)^2 - 2B.A$

Решение:
Имаме

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$(A+B)^2 - 2BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & -14 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & -12 & 2 \\ -9 & -13 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 28 & 0 \\ 15 & 29 & -8 \\ -7 & -16 & 5 \end{pmatrix}$$

Задачи за самостоятелна работа

3.6 Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ -6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, да се намерят:

а) $6A + B$ б) $3(3A + B)$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 7 & 36 & -2 \\ 2 & -10 & -27 \\ -24 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 12 & 54 & 3 \\ 6 & -12 & -45 \\ -45 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

3.7 Умножете матриците

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.8 Извършете действията

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^3$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^5$ в*) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 20 & 5 & 15 \\ 30 & 10 & 15 \\ -15 & -10 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 175 & 275 \\ 275 & 450 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

3.9 Ако $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, пресметнете $A^T.A$

Отг. $\begin{pmatrix} 20 & 14 & 6 & 6 \\ 14 & 10 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

3.10 Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, да се намерят:

а) $3A^2 + B^2 - 2(A - B)$
б) $A^3 + B^3 - 3AB$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 54 & 12 & 52 \\ 37 & 34 & 76 \\ 10 & -4 & 36 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 25 & 82 & 82 \\ 69 & 48 & 113 \\ -18 & 3 & 31 \end{pmatrix}$

ДЕТЕРМИНАНТИ

I. Основни дефиниции

Нека A е квадратна матрица от втори ред $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Детерминанта от втори ред, съответстваща на матрицата A се нарича числото

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Пример 3.3 $\quad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1).2 - (-5).4 = -2 + 20 = 18$

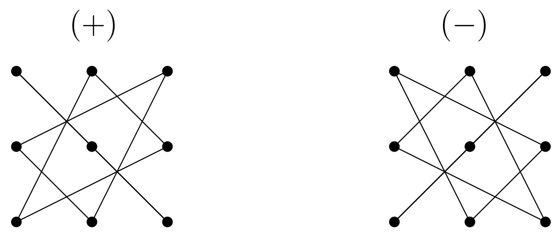
Аналогично, ако $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ е квадратна матрица от трети ред,

то съответстващата и **детерминанта от трети ред** е числото

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \ \ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

Елементите $a_{11}, \ a_{22}, \ a_{33}$ образуват т.н. **главен диагонал,** а елементите $a_{31}, \ a_{22}, \ a_{13}$ образуват т.н. **второстепенен диагонал.**

Следващата схема **(правило на Сарус или правило на триъгълниците)**



показва кои произведения участват със знак плюс и кои със знак минус при изчисляването на детерминанта от трети ред.

Пример 3.4 $\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.7.2 + 4.(-2).2 + (-5).1.(-1) - (-5).7.2 - 4.1.2 -$
$3.(-2).(-1) = 42 - 16 + 5 + 70 - 8 - 6 = 117 - 30 = 87$

II. Пресмятане на детерминанти от n-ти ред

Нека Δ е детерминанта от ред $\quad n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

а Δ_{ij} е детерминантата от ред $n-1$, която се получава от Δ чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб. Детерминантата Δ_{ij} се нарича **поддетерминанта** на Δ, съответстваща на елемента a_{ij}

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебрично допълнение (адюнгирано количество) на елемента a_{ij} наричаме числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Нека i е номерът на произволен ред на детерминантата Δ.

Дефиниция: $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{ij}A_{ij} + ... + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

Горната дефиниция ни казва, че ако умножим елементите на даден ред със съответните им адюнгирани количества и получените произведения съберем, то резултатът е стойността на детерминантата.

III. Свойства на детерминантите

1. Ако разместим два реда на детерминантата помежду им, детерминантата променя само своя знак.

2. Детерминанта, която съдържа два еднакви реда е равна на нула.

Доказателство: Да означим детерминантата с Δ, а детерминантата, получена след размяната на двата еднакви реда, с Δ_1. Тъй като двата реда са еднакви, то $\Delta_1 = \Delta$, а от свойство 1 следва, че $\Delta_1 = -\Delta$. Следователно $\Delta = -\Delta$, $\Rightarrow 2\Delta = 0$, $\Rightarrow \Delta = 0$.

3. Ако умножим елементите на даден ред с адюнгираните количества на съответните елементи на друг ред и ги съберем, ще получим нула, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{lk} = a_{i1}A_{l1} + a_{i2}A_{l2} + ... + a_{ij}A_{lj} + ... + a_{in}A_{ln} = 0, \text{при } l \neq i.$$

4. Ако елементите от един ред на детерминантата имат общ множител, той може да се изнесе пред детерминантата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda.\Delta$$

Доказателство: $\Delta_1 = \sum_{k=1}^{n}(\lambda.a_{ik})A_{ik} = \lambda.\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \lambda.\Delta$.

5. Детерминанта, която има нулев ред, е равна на нула.

Доказателство: Следва от свойство 4 при $\lambda = 0$.

6. Детерминанта, съдържаща два пропорционални реда е равна на нула.

Доказателство: Следва от свойство 4 и свойство 2.

7. Ако елементите на i-тия ред на детерминанта са суми от по две събираеми $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \quad j = 1, 2, ..., n,$ то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{i1} & c_{i2} & ... & c_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$$

Доказателство: $\Delta = \sum_{k=1}^{n}(b_{ik} + c_{ik})A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}A_{ik} = \Delta_1 + \Delta_2$.

Забележка: Очевидно е, че свойство 7 е в сила за краен брой събираеми.

Казваме, че i-тия ред на една детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & ... & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & ... & a_{i+1,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

е **линейна комбинация** на останалите редове, когато съществуват числа

$$c_1,\ c_2, ...,\ c_{i-1},\ c_{i+1}, ...,\ c_n,$$

такива че за $j = 1, 2, ..., n$ е изпълнено

$$a_{ij} = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + ... + c_{i-1} a_{i-1,j} + c_{i+1} a_{i+1,j} + ... + c_n a_{nj}$$

8. Ако един от редовете на детерминантата е линейна комбинация на останалите редове, то детерминантата е равна на нула.

Доказателство: Прилагаме свойство 7 (забележката) и свойство 6.

9. Детерминантата не се променя, ако към елементите на един ред се прибавят съответните елементи на друг ред, умножени с едно и също число.

Доказателство: Нека елементите на i-тия ред са умножени с числото λ и са прибавени към j-тия ред. Пресмятаме новата детерминанта Δ_1, като развиваме точно по този новополучен ред и прилагаме свойство 7. Получаваме: $\Delta_1 = \sum_{k=1}^{n}(a_{jk} + \lambda.a_{ik})A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk} + \sum_{k=1}^{n}(\lambda.a_{ik})A_{jk} = \Delta + 0 = \Delta$ (втората детерминанта е равна на нула, тъй като има да пропорционални реда).

10. $\det\ A = \det\ A^T$

Следствие: Свойствата 1–9 са в сила и при съответната формулировка за стълбовете на детерминантите.

Пример 3.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

(развиваме по елементите на първия ред)

$$= (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.4.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 4.1 + 2.3 = 9.$$

Детерминанта, за която всички елементи от едната страна на главния диагонал са нули, се нарича **триъгълна**. Стойността на триъгълна детерминанта е равна на произведението на числата по главния диагонал.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & ... & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}....a_{nn}$$

Пример 3.6

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$ (първия ред, умножен по (-1), прибавяме към всеки от останалите редове)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1.2.(-6).(-5) = 60.$$

Пример 3.7 (Детерминанта на Вандермонд)

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

В сила е равенството

$$\begin{aligned} W_n = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j) = \; & (x_2 - x_1) \\ & .(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ & .(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \\ & \ldots \\ & .(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Следователно $W_n \neq 0$ тогава и само тогава, когато числата x_i $(i = 1, \ldots, n)$ са различни.

ЗАДАЧИ

3.11 Пресметнете детерминантите а) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

Решение:
а) $\Delta = 5.4 - (-1).3 = 20 + 3 = 23$

б) $\Delta = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) - (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = (1-2) - (9-5) = -1 - 4 = -5$

3.12 Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение:
1. Чрез правилото на триъгълниците:

$$\Delta = 1.5.9 + 2.6.7 + 4.8.3 - 7.5.3 - 4.2.9 - 1.6.8 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0$$

2. Чрез развиване по първи ред:

$$\Delta = 1.(45 - 48) - 2.(36 - 42) + 3.(32 - 35) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

3.13 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 246 & 377 & 327 \\ 1014 & 494 & 444 \\ -342 & 671 & 621 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$, където $z = \dfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Решение:

а) $\begin{vmatrix} 246 & 377 & 327 \\ 1014 & 494 & 444 \\ -342 & 671 & 621 \end{vmatrix} =$ (умножаваме третия стълб по (-1) и го прибавяме към втория)

$= \begin{vmatrix} 246 & 50 & 327 \\ 1014 & 50 & 444 \\ -342 & 50 & 621 \end{vmatrix} =$ (от втория стълб изнасяме общ множител пред детерминантата)

$= 50. \begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 1014 & 1 & 444 \\ -342 & 1 & 621 \end{vmatrix} =$ (умножаваме първия ред с (-1) и го прибавяме към втория и към третия ред)

$= 50. \begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 768 & 0 & 117 \\ -588 & 0 & 294 \end{vmatrix} =$ (развиваме по елементите на втория стълб)

$= 50.(-1)^{1+2}.1. \begin{vmatrix} 768 & 117 \\ -588 & 294 \end{vmatrix} =$ (умножаваме втория стълб по 2 и го прибавяме към първия)

$= -50. \begin{vmatrix} 1002 & 117 \\ 0 & 294 \end{vmatrix} = -50.1002.294 = -14729400.$

б) В решението ще използваме, че $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ и формулата на Моавър от Глава 1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} = z^2+z^2+z-z-z-z^3 = -z^3+2z^2-z =$

$= -(\cos\pi + i\sin\pi) + 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) - (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) =$

$= -(-1+i.0) + 2.(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - 1 + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Пресмятането на детерминанти от по-висок ред става чрез използване на основните свойства и свеждане до детерминанти от по-нисък ред. Това може да става по различни начини. В този смисъл, следващите решения не са единствено възможните.

3.14 Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix}.$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix} =$$

Първия ред, умножен по (-1), прибавяме към всеки от останалите редове.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \end{vmatrix} =$$

Втория ред, умножен по (-2) и по (-3), прибавяме съответно към третия и четвъртия ред.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

Третия ред, умножен по (-2), прибавяме към четвъртия.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3.15 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 2 & 12 & 32 & 100 \\ 5 & 4 & 36 & 128 & 500 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 4 & 12 & 32 & 100 \end{vmatrix}$.

Решение:

а)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

Първия ред, умножен по (-1) , прибавяме към всеки от останалите редове.

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

Развиваме по елементите на втория стълб.

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 3. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

Първата детерминанта е триъгълна. Първия стълб на втората детерминанта умножаваме по 3 и прибавяме към последния стълб, след което развиваме по елементите на последния ред.

$$= 240 + 3.\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 5 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 240 + 3.2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 4 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 240 + 3.2.\begin{vmatrix} -4 & -46 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 240 + 6.254 = 1764.$$

б)

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 2 & 12 & 32 & 100 \\ 5 & 4 & 36 & 128 & 500 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 4 & 12 & 32 & 100 \end{vmatrix} =$$

Изнасяме от всеки от стълбовете общите множители.

$$= 5.4.8.20.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

Изваждаме първия ред от всеки от останалите редове.

$$= 3200.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Развиваме по елементите на първи стълб.

$$= 3200.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 15 & 24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Развиваме по елементите на трети ред.

$$= 3200.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 15 & 24 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3200.0 = 0,$$

защото детерминанта с два еднакви реда е равна на нула.

3.16 Пресметнете детерминантите от редове съответно: а) 11, б) 31, в) 10, г) n.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} b & a & a & ... & a & a \\ a & b & a & ... & a & a \\ a & a & b & ... & a & a \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & a & ... & b & a \\ a & a & a & ... & a & b \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 5 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... & 5 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$

Решение: а)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Прибавяме всички стълбове след първия към него.

$$\begin{vmatrix} 13 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 13 & 3 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 13 & 1 & 3 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 13 & 1 & 1 & ... & 3 & 1 \\ 13 & 1 & 1 & ... & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Изваждаме първия ред от останалите редове.

$$\begin{vmatrix} 13 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 2 \end{vmatrix} = 13.\underbrace{2.2.2.2.2.2.2.2.2.2}_{10} = 13.2^{10} = 13.1024 = 13312.$$

б) Решава се аналогично на а)

$$\begin{vmatrix} b & a & a & ... & a & a \\ a & b & a & ... & a & a \\ a & a & b & ... & a & a \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & a & ... & b & a \\ a & a & a & ... & a & b \end{vmatrix} = (b+30a).(b-a)^{30}$$

в)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 5 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ -5 & 5 & 0 & ... & 0 \\ -5 & 0 & 5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -5 & 0 & 0 & ... & 5 \end{vmatrix} =$$

Към първия стълб прибавяме всички останали.

$$= -\frac{1}{5}. \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 5 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}.9.5^9 = -9.5^8$$

г)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix} =$$

Прибавяме първия ред към всеки от останалите редове.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & 2 & 6 & ... & 2n \\ 0 & 0 & 3 & ... & 2n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix} = 1.2.3...n = n!$$

3.17 Решете уравнението $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

Прибавяме първия ред на детерминантата към втория и след това развиваме по елементите на първия стълб.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

Развиваме по елементите на последния стълб.

$$= x.\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^2.\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2-x-2) = x^4 - x^3 - 2x^2$$

Следователно уравнението, което трябва да решим е $x^2(x^2-x-2)=0$ и корените му са $x_{1,2}=0,\ x_3=2,\ x_4=-1.$

Задачи за самостоятелна работа

3.18 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

Отг. а) 12; б)1; в) 60

3.19 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} a+bi & -b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3-x^2 & x^2+1 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} \operatorname{cotg}^2 x & \operatorname{tg}^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix}$

Отг. а) $(a+b)^2$; б) 0; в) $x-1$; г) $\cos 2x$

3.20 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 16 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 11 & 8 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Отг. а) 12; б) 360 в) 2

3.21 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & a & -x \\ -a & 1 & x \\ x & -x & 1 \end{vmatrix}$

Отг. а) $2a^2(x+a)$; б) $1+a^2+2x^2$

3.22 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Отг. а) -1; б) 12; в) -105 г)-10

3.23 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Отг. а) $x^5 - 6x^3 + 8x$; б) 56

3.24 Да се решат уравненията:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -15 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$

Отг. а) $x_1 = -1, \quad x_{2,3} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

б) $x_{1,2} = 0, \quad x_3 = -5, \quad x_4 = 3$

ОБРАТНА МАТРИЦА

Дефиниция 3.1 *Матрицата A^{-1} се нарича* ***обратна матрица*** *на квадратната матрица A, ако*

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E.$$

Дефиниция 3.2 *Квадратната матрица A се нарича* ***особена****, ако нейната детерминанта е равна на нула и* ***неособена*** *в противен случай.*

Теорема 3.1 *Необходимо и достатъчно условие една квадратна матрица да има обратна е тя да бъде неособена.*

Доказателство: 1. Нека матрицата A има обратна. Ще докажем, че A е неособена, като използваме следния факт: ако A и B са две квадратни матрици и $A.B = C$, то е в сила равенството $\det A . \det B = \det C$.

От това, че матрицата A има обратна следва, че е изпълнено дефиниционното равенство $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$. Следователно $\det A.\det A^{-1} = \det E = 1$. Тогава следва, че $\det A \neq 0$, т.е. A е неособена.

2. Нека сега матрицата A е неособена, т.е $\det A \neq 0$. Ще докажем, че

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} в детерминантата $\det A$.

Наистина

$$A.A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det A & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \det A \end{pmatrix} = E,$$

като при умножението на двете матрици съществено използвахме дефиницията и 3-то свойство от раздел "Детерминанти". Аналогично се проверява и равенството $A^{-1}.A = E$. ■

Пример 3.8 Да се намери обратната матрица на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$A_{11} = 8, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Пример 3.9 Да се намери обратната матрица на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:
Пресмятаме детерминантата

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Понеже $\det A \neq 0$, матрицата A е неособена и следователно съществува обратната матрица A^{-1}.
Пресмятаме адюнгираните количества

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Следователно

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & -0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Като използваме обратна матрица, можем да решаваме матрични уравнения от вида

$$AX = B,$$

където A е квадратна неособена матрица от ред m, а B е произволна правоъгълна матрица от тип $m \times n$. Неизвестната матрица X е

$$X = A^{-1}B.$$

Аналогично, решението на матричното уравнение

$$XA = B$$

е

$$X = BA^{-1},$$

при условие, че матрицата A^{-1} съществува.

Обърнете внимание:
Тъй като комутативният закон не е в сила при умножение на матрици, то в горните формули е съществено от коя страна в произведението е матрицата A^{-1} и от коя матрицата B, т.е. дали умножаваме с обратната матрица отдясно или отляво.

От горните два случая следва, че решението на матричното уравнение

$$AXB = C$$

е

$$X = A^{-1}CB^{-1},$$

при условие, че матриците A^{-1} и B^{-1} съществуват.

<u>*Пример 3.10*</u> Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Означаваме съответно $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пресмятаме

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Понеже $\det A \neq 0$, матрицата A е неособена и следователно съществува обратната матрица A^{-1}.

Получаваме

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 38 & -41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$X = \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 38 & -41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 85 & 124 \\ 60 & 88 \end{pmatrix}.$$

<u>*Пример 3.11*</u> Да се реши матричното уравнение

$$X. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

За обратната матрица получаваме:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следователно $X = B.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 16 & -4 & -8 \\ 10 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & -1.5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2.5 & -2 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧИ

3.25 Съществуват ли обратни матрици на матриците?

а) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) $B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Решение: а) Пресмятаме

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Умножаваме втория стълб по 2 и прибавяме към първия и третия стълб, след това събираме същия стълб с четвъртия и накрая развиваме по елементите на четвъртия ред.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 10 & 5 & 12 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6.(-1). \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix} = -374 \neq 0$$

Матрицата A е неособена и следователно съществува A^{-1}.

б) Пресмятаме

$$\det B = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Втория стълб, умножен съответно по 1 и 2 прибавяме към първия и третия стълб, след което развиваме по елементите на четвъртия ред.

$$= \begin{vmatrix} -4 & 2 & 7 & 7 \\ -4 & -8 & -11 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 7 & 7 \\ -4 & -11 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -4.0 = 0.$$

Матрицата B е особена, следователно не съществува B^{-1}.

3.26 Намерете обратната матрица на всяка от следните матрици:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: а) Нека $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$$A_{11} = 5; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = -9; \quad A_{22} = 2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

б) Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$\det\ A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Първия ред, умножен по (-1), прибавяме към втория.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Пресмятаме адюнгираните количества:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -5 & -6 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & -6 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -5 & -6 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Следователно

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

3.27 Да се решат матричните уравнения

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 11 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Решение: а) Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогава

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

и

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} = = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 16 & 24 & 0 \\ 36 & -2 & 20 \\ 28 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

б) Нека $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогава

$$A^{-1} = \frac{1}{365} \begin{pmatrix} 222 & 211 & 96 & -70 \\ -53 & -29 & 56 & 20 \\ 68 & -11 & 59 & -5 \\ 78 & 84 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

и

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{365} \begin{pmatrix} 222 & 211 & 96 & -70 \\ -53 & -29 & 56 & 20 \\ 68 & -11 & 59 & -5 \\ 78 & 84 & 14 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{365} \begin{pmatrix} -100 & -431 \\ 185 & 509 \\ 45 & 256 \\ -45 & -329 \end{pmatrix}.$$

Задачи за самостоятелна работа

3.28 Имат ли обратна матрица следните матрици?

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ -1 & 3 & 12 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Отг. а) да; б) не

3.29 Намерете обратните матрици на матриците

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 11 & 5 & 53 \\ 4 & 2 & 15 \\ 6 & 3 & 23 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Отг. а) $\begin{pmatrix} -16 & -6 & 9 \\ 18 & 7 & -10 \\ -11 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 44 & -31 \\ -2 & -65 & 47 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

в) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -6 \\ 10 & -5 & -15 \end{pmatrix}$ г) $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -6 & 13 & -5 \\ -14 & 23 & -8 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3.30 Да се решат матричните уравнения

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -44 & 16 \\ 42 & -7 & 56 \\ 12 & 26 & -10 \\ 18 & 16 & 40 \end{pmatrix}$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 67 & -49 \\ 165 & -121 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -6 & 6 & -2 \\ 9 & -9 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Глава 4

Ранг на матрица

Целта на тази глава е да запознае читателя с понятията линейна зависимост и линейна независимост на система вектори и ранг на матрица . След усвояване на материала вие ще умеете да намирате ранг на матрица.

Нека

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

е множество (система) от вектор-стълбове. За краткост вместо вектор-стълбове ще казваме само вектори.

Дефиниция 4.1 *Ще казваме, че системата вектори (4.1) е* ***линейно независима****, ако само нулевата линейна комбинация на векторите е равна на нулевия вектор. В противен случай системата (4.1) се нарича* ***линейно зависима****.*

Основна роля в дефиницията играе равенството

$$c_1.A_1 + c_2.A_2 + c_3.A_3 + \cdots + c_n.A_n = \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

където $c_1, c_2, \ldots, c_n$ са константи, а $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Ако равенство (4.2) е възможно само за $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, то системата вектори е линейно независима. Ако поне едно от числата $c_1, c_2, \ldots, c_n$ е различно от нула, тогава системата вектори е линейно зависима.

Теорема 4.1 *Една система вектори е линейно зависима тогава и само тогава, когато поне един от векторите се изразява като линейна комбинация на останалите.*

Доказателство:
1. Нека системата вектори е линейно зависима. От дефиницията следва, че е изпълнено $c_1.A_1 + c_2.A_2 + c_3.A_3 + \cdots + c_n.A_n = \mathbf{0}$, като поне един от коефициентите е различен от нула. Нека c_1 е такъв коефициент. Тогава:

$$A_1 = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right).A_2 - \left(\frac{c_3}{c_1}\right).A_3 - \cdots - \left(\frac{c_n}{c_1}\right).A_n,$$

което означава, че векторът A_1 се изразява като линейна комбинация на останалите.

2. Обратното е очевидно, защото ако $A_1 = \lambda_2.A_2 + \lambda_3.A_3 + \cdots + \lambda_n.A_n$, то получаваме равенството $(-1).A_1 + \lambda_2.A_2 + \lambda_3.A_3 + \cdots + \lambda_n.A_n = \mathbf{0}$, което показва, че системата е линейно зависима. ■

Следствие 4.1 *Ако една система вектори е линейно независима, то никой от векторите не може да се изрази като линейна комбинация на останалите.*

Теорема 4.2 (Достатъчни условия за линейна зависимост)
1. Ако една системата вектори съдържа нулевия вектор, тя е линейно зависима.
2. Ако една подсистема на дадена система вектори е линейно зависима, то и цялата система е линейно зависима.

Доказателство:
1. Очевидно е, че $0.A_1 + 0.A_2 + 0.A_3 + \cdots + 0.A_n + 1.\mathbf{0} = \mathbf{0}$ и тъй като един от коефициентите е единица (различен от нула), то системата вектори е линейно зависима.

2. Нека подсистемата $A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_k$ е линейно зависима. Това означава, че е изпълнено равенството $c_1.A_1 + c_2.A_2 + \cdots + c_k.A_k = \mathbf{0}$ и поне един от коефициентите е различен от нула. Като прибавим към лявата страна на това равенство останалите вектори, умножени с нула, ще получим $c_1.A_1 + c_2.A_2 + \cdots + c_k.A_k + 0.A_{k+1} + \cdots + 0.A_n = \mathbf{0}$, което показва че цялата система е линейно зависима. ■

Следствие 4.2 *Всяка подсистема на линейно независима система вектори е линейно независима.*

Дефиниция 4.2 *Множество от максимален брой линейно независими вектори на дадена система вектори наричаме* ***базис*** *на системата.*

Теорема 4.3 *Системата вектори*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad , E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

е линейно независима.

Доказателство: От равенството

$$c_1.E_1 + c_2.E_2 + \cdots + c_m.E_m = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T$$

следва, че $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$, т.е. системата вектори е линейно независима. ■

Нека в матрицата A с m реда и n стълба са избрани k реда и k стълба $(k \leq \min(m, n))$. Елементите, в които тези редове и стълбове се пресичат, образуват квадратна матрица от ред k, детерминантата на която се нарича **минор** от k-ти ред, принадлежащ на матрицата A.

Дефиниция 4.3 *Под ранг на матрица се разбира най-високият от редовете на различните от нула минори.*

За ранг на нулевата матрица се приема числото нула. Рангът на матрицата A означаваме с $r(A)$. Очевидно е, че ако всички минори от ред k на дадена матрица са равни на нула, то рангът на тази матрица е по-малък от k.

<u>*Пример 4.1*</u> Матрицата $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ има ранг $r = 2$.

Наистина минорът от ред 2 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$

а всички минори от ред 3 са равни на нула

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -7 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Между ранга на дадена матрица и броя на нейните линейно независими вектор-стълбове има следната зависимост:

Теорема 4.4 *Ако рангът на една матрица е равен на r, то съществуват r на брой линейно независими вектор-стълбове и всички останали се изразяват като тяхна линейна комбинация.*

Доказателство: Нека матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

има ранг r и нека минорът от r-ти ред, който е различен от нула е главният минор

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ако допуснем, че първите r стълба на матрицата са линейно зависими ще следва, че някой стълб на D е линейна комбинация на останалите стълбове и стойността на D ще бъде равна на нула. Следователно първите r стълба на матрицата са линейно независими. Сега ще покажем, че k-тият стълб $(\forall k > r)$ на матрицата се изразява като линейна комбинация на първите r. Да разгледаме детерминантата

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}$$

$i = 1, 2, \dots, m.$

Тази детерминанта е равна на нула, защото ако $i < r$, тя има два еднакви реда, а ако $i > r$, то $\Delta_k = 0$ като минор от $r+1$-ви ред на матрица с ранг r.
Да развием Δ_k по последния ред

$$a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \cdots + a_{ir}.A_{ir} + a_{ik}.D = 0$$

Следователно:

$$a_{ik} = -\left(\frac{A_{i1}}{D}\right).a_{i1} - \left(\frac{A_{i2}}{D}\right).a_{i2} - \cdots - \left(\frac{A_{ir}}{D}\right).a_{ir}$$

и ако означим

$$c_1 = -\frac{A_{i1}}{D}, \quad c_2 = -\frac{A_{i2}}{D}, \quad \ldots, \quad c_r = -\frac{A_{ir}}{D}$$

получаваме

$$a_{ik} = c_1.a_{i1} + c_2.a_{i2} + \cdots + c_r.a_{ir}$$

■

Следствие 4.3 *Ако рангът на една матрица е равен на r, то съществуват r на брой линейно независими вектор-редове и всички останали се изразяват линейно чрез тях.*

Доказателство: Прилагаме теоремата за транспонираната матрица и съобразяваме, че стойността на D няма да се промени при транспонирането.

Следствие 4.4 *Максималният брой линейно независими стълбове на матрицата е равен на максималния брой линейно независими редове и това е ранга на матрицата.*

Пример 4.2 Матрицата $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & -7 & -8 & -19 \end{pmatrix}$ има ранг три, защото главният минор от трети ред $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & -8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Теорема 4.4 ни казва не само, че четвъртият стълб е линейна комбинация на първите три стълба, но ни показва и как да намерим коефициентите на тази линейна комбинация.

$$A_{i1} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 9 \\ -7 & -8 & -19 \end{vmatrix} = 30, \; A_{i2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & -8 & -19 \end{vmatrix} = 20, \; A_{i3} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 9 \\ 1 & -7 & -19 \end{vmatrix} = 10$$

Следователно $c_1 = -\frac{A_{i1}}{D} = 3, \quad c_2 = -\frac{A_{i2}}{D} = 2, \quad c_3 = -\frac{A_{i3}}{D} = 1$, т.е.

$$a_{i4} = 3.a_{i1} + 2.a_{i2} + a_{i3} \qquad i = 1, 2, 3$$

От раздел "Детерминанти" знаем, че ако някой ред (стълб) на дадена детерминанта е линейна комбинация на останалите, то стойността и е равна на нула. Сега ще докажем, че е в сила и обратното твърдение.

Теорема 4.5 *Ако една детерминанта е равна на нула, то някой от нейните редове (стълбове) е линейна комбинация на останалите.*

Доказателство: Нека A е квадратна матрица от ред n. Щом $\det A = 0$, то $r(A) \leq n-1$. Следователно поне един ред и стълб на матрицата не принадлежат на минора от най-висок ред, който е различен от нула. Остава само да приложим теорема 4.4 и следствие 4.3. ∎

Пресмятането на ранга на една матрица чрез използване само на дефиницията не е ефективно, защото води до пресмятането на голям брой минори. Ето защо рангът на една матрица се пресмята, като се използват елементарни преобразования и теорема 4.4.

Елементарни преобразования на матрица се наричат следните преобразования:

а) разместване на два реда (стълба) помежду им;
б) умножаване на ред (стълб) с различно от нула число;
в) прибавяне към един ред (стълб) на друг ред (стълб), умножен с число;
г) транспониране.

Теорема 4.6 *Елементарните преобразования не променят ранга на матрицата.*

Казваме, че една матрица има **диагонална форма**, когато всичките и елементи освен диагоналните $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{kk}$ са равни на нула.

Теорема 4.7 *Всяка матрица може да се приведе в диагонална форма посредством елементарни преобразования.*

Пример 4.3 Намерете чрез елементарни преобразования ранга на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Към втория ред прибавяме първия, умножен по 2.

Получаваме

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Означението $A \sim B$ изразява факта, че матрицата B е получена от матрицата A чрез прилагане на елементарни преобразования.

След като в първия стълб сме получили нули под главния диагонал, то автоматично можем да анулираме елементите в първи ред след главния диагонал, защото това става с умножение на първи стълб с подходящи числа и прибавянето му към съответните стълбове.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Сега разместваме втори и трети ред

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред с (-3) и прибавяме към трети ред

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

След като и във втория стълб сме получили нули под главния диагонал, то автоматично можем да анулираме елементите след главния диагонал.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с $\dfrac{1}{2}$ и втори ред с (-1).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Първият стълб на последната матрица е вектора E_1, вторият е E_2, които както знаем са линейно независими и това е максималния брой такива вектори. Следователно тя има ранг 2. Тъй като елементарните преобразования не променят ранга, то рангът на матрицата A също е 2.

Рангът на една матрица в диагонална форма е равен на броя на ненулевите диагонални елементи.

ЗАДАЧИ

4.1. Намерете ранга на матриците:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Решение: а)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \quad \text{(Разменяме местата на първия и третия ред.)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$$ (Умножаваме първия ред с $-5, -3$ и -7, и прибавяме съответно към втория, третия и четвъртия ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix} \sim$$ (Анулираме елементите в първи ред след главния диагонал и от втория ред изваждаме третия.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix} \sim$$ (Умножаваме втория ред с -2 и -4 и прибавяме съответно към третия и четвъртия ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim$$ (Анулираме елементите във втори ред след главния диагонал.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim$$ (Разместваме трети и пети стълб, а след това трети и четвърти ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$ (Умножаваме втория ред с $\dfrac{1}{4}$, а третия ред с $\dfrac{1}{8}$.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad r(A) = 3.$$

б)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim$$ (Първия ред, умножен по $-2, -3$ и -4, прибавяме към втория, третия и четвъртия ред съответно.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim$$ (Анулираме елементите в първи ред след главния диагонал и умножаваме втория, третия и четвъртия ред по -1.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim$$ (Втория ред, умножен по -2 и -3, прибавяме съответно към третия и четвъртия ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$ (Анулираме елементите във втори ред след главния диагонал.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad r(B) = 2.$$

4.2 Определете ранга на матрицата в зависимост от стойностите на λ.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ \lambda & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Решение: а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$ (Разменяме местата на втори и четвърти ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim$$ (Умножаваме първи ред с -2, -7, -4 и прибавяме съответно към втори, трети и четвърти ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \end{pmatrix} \sim$$ (Анулираме елементите в първи ред след главния диагонал.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \end{pmatrix} \sim$$ (Умножаваме втори ред с -5, -3 и прибавяме съответно към трети и четвърти ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim$$ (Анулираме елементите във втори ред след главния диагонал.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim$$ (Разместваме местата на 3-ти и 4-ти ред и 3-ти и 4-ти стълб.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ако $\lambda \neq 0$, рангът на матрицата е 3, защото имаме три линейно независими стълба. Ако $\lambda = 0$, рангът на матрицата е 2, защото линейно независимите стълбове са два.

б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ \lambda & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \sim$ (Прибавяме втори ред към първи и разменяме първи и трети стълб.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \\ 7 & 1 & \lambda \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \sim$ (Умножаваме първи ред с -5,-7,10 и прибавяме съответно към втори, трети и 4-ти ред.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 15 & 7+\lambda \\ 0 & -15 & -10 \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \sim$ (Умножаваме втори ред с $\dfrac{1}{2}$ и сменяме местата на 3-ти и 4-ти ред.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -10 \\ 0 & 15 & 7+\lambda \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \sim$ (Анулираме елементите в първи ред след главния диагонал. Умножаваме втори ред с 5, -5, $-\dfrac{\lambda}{3}$ и прибавяме съответно към 3-ти, 4-ти и 5-ти ред.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3}(3-\lambda) \end{pmatrix} \sim$ (Анулираме елементите във втори ред след главния диагонал и умножаваме 5-ти ред с $-\dfrac{3}{2}$. След това разменяме 3-ти и 5-ти ред.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$ (Изваждаме 3-ти ред от 4-ти ред.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно при $\lambda \neq 3$ рангът на матрицата е 3, а при $\lambda = 3$ рангът на матрицата е 2.

Задачи за самостоятелна работа

4.3 Намерете ранга на матриците:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 6 & -4 & 11 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -12 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 6 & 0 \\ -3 & 15 & 25 & 2 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Отг. а) 2; б) 3 в) 2, г) 2

4.4 Намерете ранга на матриците:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 9 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & -4 & 6 \\ -2 & -30 & -3 & 14 & -17 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 2 & -1 \\ 4 & -18 & 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -12 & 8 & 1 & 9 \\ 2 & -6 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Отг. а) 4; б) 2; в) 3; г) 3

4.5 Определете ранга на матриците в зависимост от стойностите на λ.

а) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Отг. а) $r = 4$ при $\lambda \neq 3,\ \lambda \neq -\frac{36}{5}$;

$r = 3$ при $\lambda = 3,\ \lambda = -\frac{36}{5}$;

б) $r = 2$ при $\lambda = 1$; $r = 3$ при $\lambda \neq 1$;

Глава 5

Системи линейни уравнения

Целта на тази глава е да запознае читателя със системите от линейни уравнения и основните методи за тяхното решаване. След усвояване на материала вие ще можете да решавате линейни системи чрез формулите на Крамер и чрез метода на Гаус.

Система линейни уравнения (линейна система) от m уравнения с n неизвестни наричаме система от вида

$$\left| \begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & a_{m3}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{5.1}$$

Тук $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са **неизвестни,** числата $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – **коефициенти пред неизвестните,** а числата $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – **свободни членове.** Ако поне един от свободните членове е различен от нула, системата се нарича **нехомогенна.** Когато всички свободни членове са нули, системата се нарича **хомогенна.**

Решение на системата (5.1) наричаме всяка съвкупност от числа

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n,$$

които, заместени в уравненията на системата, ги превръщат във верни числови равенства. Да решим една линейна система означава да намерим всичките и решения или да установим, че тя няма решение. Система, която има решение се нарича **съвместима.** Ако системата няма решение, тя се нарича **несъвместима.**

Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

от коефициентите пред неизвестните наричаме **основна матрица** на системата (5.1) или само **матрица на системата,** а матрицата

$$A^* \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

се нарича **разширена матрица на системата.**

Ако означим

$$X \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

системата (5.1) можем да запишем като матрично уравнение

$$A\,X \;=\; B \tag{5.2}$$

<u>*Пример 5.1*</u> Решете системата:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 13 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -15 \end{array}\right.$$

Решение: Записваме системата като матрично уравнение $A.X = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Пресмятаме детерминантата на матрицата A (виж Глава 3).

$$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \;=\; 2.\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -34 \neq 0.$$

Следователно матрицата A е неособена и има обратна A^{-1}. Намираме обратната матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \;=\; -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -10 & -2 & -4 \\ -13 & 11 & 5 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Следователно:

$$X = A^{-1}.B = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -10 & -2 & -4 \\ -13 & 11 & 5 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} 34 \\ 68 \\ 136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Решението на системата е

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = -4.$$

Нека (5.3) е линейна система от n уравнения с n неизвестни

$$\left| \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & a_{n3}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Да означим с Δ и Δ_j следните детерминанти:

$$\Delta = det \quad A \quad = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_j \quad = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,j-1} & b_3 & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема 5.1 (Формули на Крамер) *Ако* $\Delta = det\ A \neq 0$, *то системата линейни уравнения (5.3) има единствено решение, което се задава със следните формули:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad\qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Доказателство: В съответствие с (5.2) системата (5.3) можем да запишем като матрично уравнение $A.X = B$. Тъй като $\Delta = det\ A \neq 0$, то матрицата A е неособена и следователно матричното уравнение има единствено решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}.B \ = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1.A_{11} + b_2.A_{21} + \ldots + b_n.A_{n1} \\ b_1.A_{12} + b_2.A_{22} + \ldots + b_n.A_{n2} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ b_1.A_{1n} + b_2.A_{2n} + \ldots + b_n.A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix} .$$

Следователно
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \dots \qquad , x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

■

1. Тъй като системата (5.3) има еднакъв брой уравнения и неизвестни, то матрицата на системата е квадратна и можем да разглеждаме детерминантата Δ, съответстваща на тази матрица.

2. Детерминантата Δ_j се получава от детерминантата Δ като се замени $j-$ят стълб на Δ със стълба на свободните членове.

3. Формулите на Крамер се прилагат само за линейни системи, които имат еднакъв брой уравнения и неизвестни.

Пример 5.2 Решете системата

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Решение: Тъй като системата има три уравнения и три неизвестни, то можем да се опитаме да я решим чрез формулите на Крамер. Най-напред пресмятаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Следователно, според Теорема 5.1, системата има единствено решение, което можем да намерим по формулите на Крамер (5.4).

Пресмятаме последователно детерминантите:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-3). \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

и получаваме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1.$$

Две линейни системи се наричат **еквивалентни**, ако множествата от решенията им съвпадат, т.е. всяко решение на едната е решение на другата и обратно.

Върху линейна система уравнения могат да се извършват следните **елементарни преобразования:**
1) Разменяне местата на две уравнения в системата.
2) Умножение на уравнение от системата с число, различно от нула.
3) Умножение на уравнение от системата с число и прибавяне към друго уравнение.

Теорема 5.2 *Системи, които се получават една от друга чрез елементарни преобразования, са еквивалентни.*

Един от най-често използваните методи за решаване на линейни системи уравнения е **методът на Гаус** (или метод на последователно изключване на неизвестните). Той има **два хода:**

Прав ход – При правия ход чрез последователно елиминиране на неизвестните в стълбовете под главния диагонал получаваме еквивалентна система, която има триъгълен или трапецовиден вид. Елиминирането на неизвестните става чрез прилагане на елементарни преобразования **върху редовете на системата.** При първата стъпка елиминираме неизвестните в първия стълб, при втората стъпка във втория стълб и т.н. Ако след някоя стъпка елементът на главния диагонал в следващия стълб е нула, търсим различен от нула елемент в следващите редове и/или стълбове и чрез съответната размяна на редове и/или стълбове поставяме този елемент на диагонала. Правият ход завършва, когато елиминираме неизвестните под главния диагонал във всички стълбове на системата.

Обратен ход – При обратния ход, тръгвайки от последното уравнение на получената система (тя е еквивалентна на дадената) към първото, намираме последователно всичките неизвестни или установяваме, че системата няма решение.

При числената реализация на метода на Гаус преобразованията се извършват върху редовете на разширената матрица на системата (т.е. неизвестните не се пишат - виж следващите примери). Знакът $\sim$ означава, че системите са еквивалентни. Възможните различни случаи са разгледани в следващите три примера.

Пример 5.3 Чрез метода на Гаус решете системата

$$\left|\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 11x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Решение: Записваме системата по следния начин:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Този запис трябва да се възприема като символичен запис на системата само чрез нейните коефициенти. Отвесната черта отделя стълба със свободните членове и замества знаците за равенство.

Прав ход:

Първа стъпка – елиминираме неизвестното x_1 в първия стълб под главния диагонал. За целта умножаваме първи ред с (-1) и го прибавяме последователно към втори и трети ред; първи ред, умножен с (-3), прибавяме към четвърти ред. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim$$

Втора стъпка – елиминираме неизвестното x_2 във втория стълб под главния диагонал, като прибавим втори ред към четвърти и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim$$

Трета стъпка – умножаваме трети ред с $(-\dfrac{9}{2})$ и го прибавяме към четвърти ред. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right)$$

Всички елементи под главния диагонал са нули. С това правият ход е завършен. Получена система има триъгълен вид.

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & - & 2x_3 & & & = & 4 \\ & & & & & & 2x_4 & = & -8 \end{array}\right.$$

Забележка: След като правият ход е завършен, то лесно можем да определим ранговете на матриците A и A^*. За разгледания пример имаме $r(A) = r(A^*) = 4$.

Обратен ход:

От последното уравнение получаваме

$$2x_4 = -8. \qquad \Longrightarrow \quad x_4 = -4$$

От предпоследното уравнение получаваме

$$-2x_3 = 4. \qquad \Longrightarrow \quad x_3 = -2$$

Заместваме намерената стойност на x_3 във второто уравнение и получаваме

$$x_2 + 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x_2 = -4$$

Заместваме намерените стойности на x_4, x_3 и x_2 в първото уравнение и получаваме

$$x_1 - 4 - 8 - 12 = -3 \qquad \Longrightarrow \quad x_1 = 21$$

Следователно решението на системата е

$$x_1 = 21 \quad x_2 = -4 \quad x_3 = -2 \quad x_4 = -4$$

<u>*Пример 5.4*</u> Решете чрез метода на Гаус системата

$$\left| \begin{array}{ccccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 3 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 5x_4 & - & 5x_5 & = & -3 \end{array} \right.$$

Решение: Записваме системата по следния начин:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right)$$

Когато пресмятанията се извършват на ръка, удобно е числото, чрез което правим нули в стълба под него, да бъде единица. Поради тази причина, преди да започнем правия ход, умножаваме първия ред по две и изваждаме третия ред.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim$$

Прав ход: (обясненията са след пресмятанията)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 15 & -33 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 14 & -26 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 11 & -41 & -9 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 41 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & 14 & -26 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 15 & -33 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 41 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 56 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 49 & 14 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_3 & b \\ \hline 1 & 1 & -1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 41 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_3 & b \\ \hline 1 & 1 & -1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 41 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Първа стъпка – умножаваме последователно първи ред с (-7), (-5), (-6) и го прибавяме съответно към втори, трети и четвърти ред.

Умножаваме четвърти ред по (-1) и го разместваме с втори ред.

Втора стъпка – умножаваме втори ред с (2) и го прибавяме съответно към трети и четвърти ред.

Разместваме трети, четвърти и пети стълб и делим трети и четвърти ред съответно на (-8) и (-7).

Трета стъпка – умножаваме трети ред с (-1) и го прибавяме към четвърти ред.

Получена система има трапецовиден вид:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_4 & + & 6x_5 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 11x_4 & + & 41x_5 & - & x_3 & = & 9 \\ & & & & x_4 & - & 7x_5 & & & = & -2 \end{array} \right.$$

Забележка: За този пример имаме $r(A) = r(A^*) = 3 < 5$.

Обратен ход:

В третото уравнение $x_4 - 7x_5 = -2$ има две неизвестни и не можем да определим еднозначно стойностите им. Затова даваме на неизвестното x_5 (*свободно неизвестно*) произволна стойност t, която се нарича *параметър*, т.е.

$$x_5 = t,$$

след което изразяваме x_4 чрез този параметър

$$x_4 = -2 + 7x_5 = -2 + 7t.$$

Във второто уравнение $x_2 - 11x_4 + 41x_5 - x_3 = 9$ отново въвеждаме параметър

$$x_3 = s$$

и получаваме

$$x_2 = 9 + 11(-2 + 7t) - 41t + s = -13 + 36t + s.$$

От първото уравнение $x_1 + x_2 - x_4 + 6x_5 + x_3 = 1$ получаваме

$$x_1 = 1 - (-13 + 36t + s) + (-2 + 7t) - 6t - s = 12 - 35t - 2s.$$

Следователно множеството от всички решения на системата се задава с равенствата

$$\begin{aligned} x_1 &= 12 - 35t - 2s, \\ x_2 &= -13 + 36t + s, \\ x_3 &= s, \\ x_4 &= -2 + 7t, \\ x_5 &= t, \end{aligned}$$

които се наричат *общо решение на системата.* В този случай общото решение зависи от два параметъра.

> Ако при решаване на система линейни уравнения по метода на Гаус се наложи да разместите два стълба, то трябва да разместите и съответните им неизвестни, записани над хоризонталната черта.

Пример 5.5 Решете чрез метода на Гаус системата

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \end{array}\right.$$

Решение: Записваме системата по следния начин

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \end{array}$$

Прав ход: (обясненията са след пресмятанията)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -5 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -6 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Първа стъпка – умножаваме последователно първи ред с (-2), (-5) и го прибавяме съответно към втори и трети.

Втора стъпка – умножаваме втори ред с (-1) и го прибавяме към трети.

Последното уравнение на системата е $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$. Следователно системата няма решение, т.е. тя е несъвместима.

Забележка: За разгледания пример ранговете на основната матрица A и на разширената матрица A^* са различни. Имаме $r(A) = 2$, а $r(A^*) = 3$.

Теорема 5.3 (Теорема на Кронекер-Капели)

Системата (5.1) е съвместима тогава и само тогава, когато рангът на основната матрицата $r(A)$ е равен на ранга на разширената матрица $r(A^*)$.

1. Ако $r(A) = r(A^*) = n$, то системата има единствено решение.

2. Ако $r(A) = r(A^*) = s < n$, то системата има безброй решения, зависещи от $(n-s)$ параметъра.

Нека (5.5) е линейна хомогенна система

$$\left| \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}\,x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & a_{m3}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Очевидно, всяка линейна хомогенна система има тривиалното нулево решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Теорема 5.4 *Необходимо и достатъчно условие една линейна хомогенна система да има ненулево решение е рангът на основната матрицата да бъде по-малък от броя на неизвестните.*

Доказателство: 1. Нека рангът на основната матрицата е по-малък от броя на неизвестните. Тогава от Теорема 5.3 следва, че системата има безброй много решения и поне едно от тях ще е ненулево.

2. Нека системата (5.5) има ненулево решение. Да допуснем, че рангът на основната матрицата е равен на броя на неизвестните. Тогава от Теорема 5.3 следва, че системата има единствено решение и то е нулевото. Получихме противоречие и следователно рангът на основната матрицата е по-малък от броя на неизвестните.

■

Следствие 5.1 *Линейна хомогенна система, в която броят на уравненията е по-малък от броя на неизвестните, има ненулево решение.*

Следствие 5.2 *Една линейна хомогенна система от n уравнения с n неизвестни има ненулево решение тогава и само тогава, когато детерминантата на матрицата на системата е равна на нула.*

<u>*Пример 5.6*</u> Решете системата

$$\left| \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Решение: **Прав ход:**

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Първа стъпка – умножаваме последователно първи ред с (-2), (-1), (-3) и го прибавяме съответно към втори, трети и четвърти ред.

Умножаваме втори ред по 2 и от него вадим трети ред.

Втора стъпка – умножаваме последователно втори ред с (-3) и (-5) и го и прибавяме съответно към трети и четвърти ред.

Делим трети ред на (-2).

Трета стъпка – умножаваме трети ред с 5 и го прибавяме към четвърти ред.

Обратен ход:

В четвъртото уравнение $3x_4 - 3x_5 = 0$ въвеждаме параметър $x_5 = t$ и изразяваме

$$x_4 = x_5 = t.$$

От третото уравнение $x_3 + x_4 - x_5 = 0$ получаваме $x_3 = 0$.

От второто уравнение получаваме $x_2 = 0$.

От първото уравнение $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0$ получаваме $x_1 = 0$.

Следователно общото решение на системата е

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad x_4 = x_5 = t$$

и зависи от един параметър.

1. Формулите на Крамер се прилагат само за системи, в които броят на уравненията е равен на броя на неизвестните. Те имат повече теоретично значение, защото пресмятането на детерминанти от по-висок ред е трудоемък процес.

2. Методът на Гаус е универсален метод за решаване на линейни системи и е приложим независимо от това какъв е броят на уравненията и какъв е броят на неизвестните.

ЗАДАЧИ

Решете системите:

5.1 $\left|\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$

Решение: Прилагаме метода на Гаус.

Прав ход:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Първа стъпка</u> – умножаваме първи ред с (-1) и го прибавяме към четвърти ред.

<u>Втора стъпка</u> – прибавяме втори ред към четвърти ред.

<u>Трета стъпка</u> – умножаваме трети ред с (-1) и го прибавяме към четвърти ред.

Обратен ход:

От третото уравнение $x_3 + x_4 = 1$ получаваме $x_4 = t$, $x_3 = 1 - t$.

От второто уравнение получаваме $x_2 = -x_3 = t - 1$.

От първото уравнение получаваме $x_1 = -x_2 = 1 - t$.

Следователно общото решение е

$$x_1 = x_3 = 1 - t, \quad x_2 = t - 1, \quad x_4 = t$$

и зависи от един параметър.

5.2 Изследвайте за съвместимост и намерете общото решение на системата в зависимост от параметъра λ.

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \lambda\, x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda\, x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda\, x_3 & = & \lambda^2 \end{array}\right.$$

Решение: Пресмятаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2.$$

За да приложим формулите на Крамер трябва $\lambda^3 - 3\lambda + 2 \neq 0$.

Решаваме уравнението

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Възможните рационални корени са делителите на свободния член: ± 1, ± 2. Прилагаме схемата на Хорнер

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0
1	1	2	0	

Следователно

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Ако $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$, можем да намерим решението по формулите на Крамер. За тази цел трябва да пресметнем детерминантите Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^3 + \lambda^2 - 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2).$$

Следователно:

1. Ако $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$, решението на системата е

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2)}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 2}{\lambda + 2}$$

2. Ако $\lambda = 1$, системата е

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

и очевидно нейното общо решение може да се зададе по следния начин

$$x_3 = t,\ x_2 = s,\ x_1 = 1 - t - s.$$

3. Ако $\lambda = -2$, системата е

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

Събираме трите уравнения и получаваме уравнението $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 6$. Следователно в този случай системата няма решение.

5.3 Изследвайте за съвместимост и намерете общото решение на системата в зависимост от параметъра λ.

$$\left| \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & + & x_4 & = & \lambda + 1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & (\lambda+1)x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & (\lambda+1)x_4 & = & 6 \end{array} \right.$$

Решение: Тъй като системата има три уравнения и четири неизвестни, то не можем да приложим формулите на Крамер и ще приложим метода на Гаус.

Прав ход:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda+1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & \lambda+1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda-1 & \lambda-1 & 4-2\lambda \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 4-\lambda \end{array} \right) \tag{5.6}$$

Първа стъпка – прибавяме първи ред към втори; умножаваме първи ред с (-2) и го прибавяме към трети ред.

Втора стъпка – събираме втори ред с трети ред.

Обратен ход:

1. Ако $\lambda \neq 1$ от третото уравнение $(\lambda - 1)x_4 = 4 - \lambda$ получаваме

$$x_4 = \frac{4-\lambda}{\lambda-1}$$

Ако $\lambda \neq -\dfrac{1}{2}$ от второто уравнение $(2\lambda+1)x_3 = \lambda$ получаваме

$$x_3 = \frac{\lambda}{2\lambda+1}$$

От първото уравнение $x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda + 1$ получаваме

$$x_2 = t - \text{параметър}, \quad x_1 = \frac{\lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda - 5}{(\lambda-1)(2\lambda+1)} - t.$$

2. Ако $\lambda = 1$, (5.6) добива вида

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Следователно системата няма решение.

3. Ако $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, (5.6) добива вида

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

Следователно системата няма решение.

Задачи за самостоятелна работа:

Решете системите:

5.4 $\left|\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

Отг. $x_1 = x_2 = x_3 = 1 \quad (\Delta = 9)$

5.5 $\left|\begin{array}{lcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}\right.$

Отг. $x_1 = -8,\ x_2 = 3 + t$
$x_3 = 6 + 2t,\ x_4 = t$

5.6 $\left|\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

Отг. $x_1 = 2t,\ x_2 = -3t,\ x_3 = t$

5.7 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & - & 8x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = 6 + 10t,\ x_2 = -2 - 5t$
$x_3 = t,\ x_4 = 1 + 3t$

5.8 $$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Отг. несъвместима

5.9 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = x_3 = t$
$x_2 = (2 - 7t)/5$
$x_4 = (6t - 1)/5$

5.10 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 23 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 12 \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = -16 + t + p + 5u$
$x_2 = 23 - 2t - 2p - 6u$
$x_3 = t,\ x_4 = p,\ x_5 = u$

5.11 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 11x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Отг. несъвместима

5.12 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = (-4t + 7p)/8$

$$x_2 = (-4t+5p)/8$$
$$x_3 = (4t-5p)/8$$
$$x_4 = t,\ x_5 = p$$

5.13 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 8 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = -1+t+2p$
$x_2 = -3+t+2p$
$x_3 = t,\ x_4 = p$

5.14 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & b \\ 9x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & a-51 \end{array}\right. ,$$

ако
$$a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

а b е най-големият отрицателен корен на уравнението
$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 6x - 8 = 0.$$

Отг. $a = 54,\ b = -1$
$x_1 = -11+6t$
$x_2 = 24-13t$
$x_3 = -29+17t$
$x_4 = t$

5.15 $$\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 2b \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & bx_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & a-1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & - & 4x_5 & = & 1 \end{array}\right. ,$$

ако
$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix},$$

а b е сумата от реалните корени на уравнението
$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 6x - 8 = 0.$$

Отг. $a = 11,\ b = -3$

$$\begin{aligned} x_1 = 2,\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3,\ x_4 = 1 \\ x_5 = 4 \end{aligned}$$

5.16 Изследвайте за съвместимост и намерете общото решение на системата в зависимост от параметъра λ.

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} \lambda\, x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda \\ (2-\lambda)x_1 & + & 3\lambda x_2 & - & x_3 & = & -4 \end{array}\right.$$

Отг.

1. Ако $\lambda \neq 2,\, \lambda \neq -3,\, \lambda \neq -\dfrac{1}{3}$ системата има единствено решение:

$$x_1 = \frac{3(\lambda-2)}{(\lambda+3)(3\lambda+1)}, \qquad x_2 = \frac{2(2\lambda+3)}{(\lambda+3)(3\lambda+1)}, \qquad x_3 = -\frac{3\lambda^2+10\lambda+24}{(\lambda+3)(3\lambda+1)}$$

2. Ако $\lambda = 2$, системата има безброй решения:

$$x_1 = -2-5t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 4+6t$$

3. Ако $\lambda = -3$, системата няма решение.

4. Ако $\lambda = -\dfrac{1}{3}$, системата няма решение.

Разгледаните теми могат да бъдат намерени и в следните книги, учебници и сборници:

[1] Тонов Ив. Комплексни числа, София, Библиотека "Алеф", НП, 1971.

[2] Божоров Е. Полиноми. София, Народна просвета, 1976.

[3] Давидов Л. Задачи за полиноми. София, Народна просвета, 1988.

[4] Димова В.С., Н.С. Стоянов, Висша математика. Част 1. София, Техника, 1977.

[5] Дочев К., Д. Димитров, Вл. Чуканов, Ръководство за упражнения по висша алгебра. Част 2. София, Наука и изкуство, 1978.

[6] Топенчаров В., Н. Стоянов и др. Сборник от задачи по висша математика. Част 1. София, Техника, 1979.

[7] Практикум по линейна алгебра и аналитична геометрия. Катедра "Математика", ВМЕИ, Габрово, 1987.

[8] А. Атанасов, В. Терзиева, Р. Даскалов, С. Капралов, Сборник от решени задачи по висша математика, Алма матер интернационал, 1998.

[9] Шопова М., К. Чиприянова и др., Сборник от задачи по висша математика. Свищов, 1992.

[10] Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления. Том I, Москва, Наука, 1978.

[11] Фаддеев Д.К., И.С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре. Москва, Наука, 1972.

[12] Апатенок Р. и др., Сборник задач по линейной алгебре. Минск, Высшэйшая школа, 1980.

[13] Болгов В.А., Б.П. Демидович, Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Москва, Наука, 1986.

[14] Бугров Я.С., С.М. Никольский, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва, Наука, 1986.

[15] Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Минск, Высшэйшая школа, 1982.

[16] Проскуряков И.В., Сборник задач по линейной алгебре. Москва, Наука, 1962.

[18] Каплан И. А., Практические занятия по высшей математике. Част I. ХГУ, Харьков, 1960.

[19] А. Н. Канатников, А.П. Крищенко, Аналитическая геометрия, Москва, Издательство МГТУ имени Н. Баумана, 2002.

[20] А. Н. Канатников, А.П. Крищенко, Линейная алгебра, Москва, Издательство МГТУ имени Н. Баумана, 2002.

[21] D.C. Lay, Linear Algebra and its applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[22] Hirsch L., A. Goodman, Understanding Intermidiate Algebra, West Publ. Company, Minnesota, 1987.

[23] Larson R., B. Edwards, Finite Mathematics with Calculus, D.C. Heat and Company, Lexington, Massachusetts, 1991.

[24] Papula L., Mathematik fur ingenieure, I, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.

[25] G. Eisenreich, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Academie Verlag GmbH, Berlin, 1991.