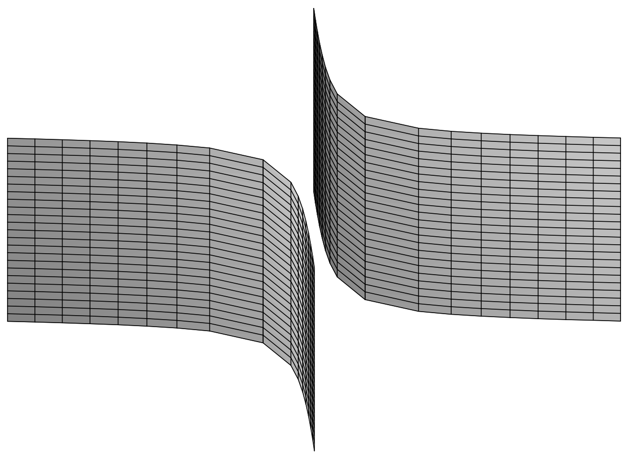
РУМЕН НИКОЛОВ ДАСКАЛОВ

ЕЛЕНА МЕТОДИЕВА ДАСКАЛОВА

В И С Ш А М А Т Е М А Т И К А

ЧАСТ I



Аналитична геометрия

Габрово, 2012

Автори: Авторите са преподаватели в катедра “Математика“ на Технически университет - Габрово

проф. дмн Румен Николов Даскалов е завършил ФМИ на СУ“Св. Кл. Охридски“. Защитил е дисертационен труд в областта на комбинаторната теория на кодирането. Член е на American Mathematical Society (AMS), The Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) и Съюз на математиците в България (СМБ).

доц. д-р Елена Методиева Даскалова е завършила ФМИ на СУ“Св. Кл. Охридски“. Защитила е дисертационен труд в областта на комбинаторната теория на кодирането.

В И С Ш А   М А Т Е М А Т И К А, Част I,

Аналитична геометрия.

Учебник за студенти от инженерно-технически специалности.

Първо издание, 86 стр.

ПРЕДГОВОР

Учебникът "Висша математика", част I (Аналитична геометрия), е предназначен за студенти от Технически университет - Габрово с образователно-квалификационна степен "бакалавър".

Основната цел на учебника е да намери необходимия баланс между последователното, логическо изграждане на математическите понятия и усвояването им от бъдещите инженери като основен апарат за изучаване на съответните общотехнически и специални дисциплини и използването им в бъдещите приложни и научни изследвания. В съответствие с ограничения хорариум, ударението е поставено на втората страна, като изложението е подкрепено с множество примери и подробно решени задачи.

Разгледани са следните раздели: вектори; равнини и прави в пространството; прави в равнината; елипса, хипербола и парабола; смяна на координатната система; канонизация на криви линии от втора степен; повърхнини от втора степен. Това е материалът, който се изучава от студентите от всички специалности през първия семестър.

Всяка глава съдържа съответния теоретичен материал, примери, голям брой решени задачи и задачи за самостоятелна подготовка. Всички задачи имат отговори, което ще улесни студентите при самостоятелната им работа. По-трудните задачи са отбелязани със звездичка.

Учебникът ще бъде особено полезен за студенти задочно и дистанционно обучение.

Октомври 2012 г. Авторите

СЪДЪРЖАНИЕ

6. Вектори 91

7. Равнина и права в пространството 111

8. Права в равнината 129

9. Елипса, хипербола, парабола 145

10. Трансформация на координатната система 159

11. Повърхнини от втора степен 167

Глава 6

Вектори

Целта на тази глава е да припомни и разшири познанията на читателя за понятието вектор и основните действия с вектори, главно в координатна форма, както и да го запознае с операциите скаларно, векторно и смесено произведение. След усвояване на материала вие ще можете да намирате координатите на сума, разлика и произведение на вектор с число; да пресмятате координатите на точка, деляща отсечка в дадено отношение; да пресмятате скаларно, векторно и смесено произведение на вектори; да прилагате въведените понятия и операции за пресмятане на лица, обеми и други.

1. Вектор. Сума и разлика на вектори. Произведение на вектор с число.

Насочена отсечка (вектор) наричаме отсечка, ограничена от две точки, едната от които е избрана за начало, а другата за край. Ако началото е A , а краят е B, вектора означаваме с $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{a}$.

Дължината на отсечката AB наричаме **дължина (модул)** на вектора. Означаваме с $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\overrightarrow{a}|$.

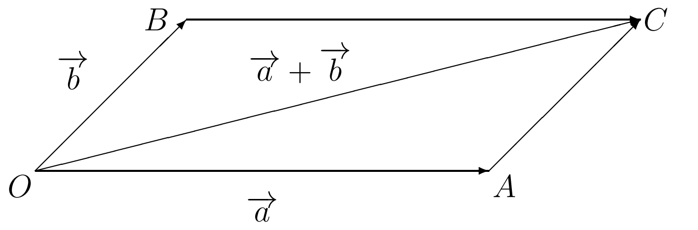
Вектор, на който началото и краят съвпадат, наричаме **нулев** вектор $\overrightarrow{o}$. Вектор с дължина 1 наричаме **единичен**.

Два вектора са **равни**, ако имат равни дължини и еднакви посоки. Ако два вектора са равни, ще ги считаме за един и същи вектор.

Вектори, които са успоредни на една права се наричат **колинеарни**, а вектори, които лежат в една равнина или са успоредни на една равнина се наричат **компланарни**.

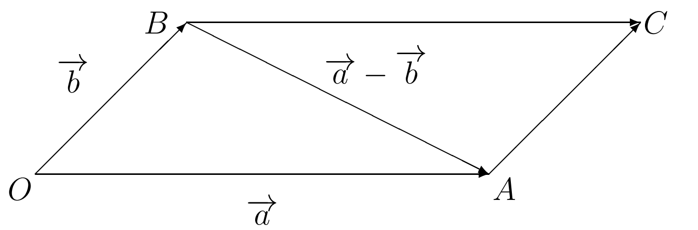
Сума на векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ наричаме вектора $\overrightarrow{b}$ с начало, съвпадащо с началото на първия вектор и край, съвпадащ с края на последния вектор, ако векторите са разположени така, че началото на всеки от тях да съвпада с края на предхождащия го. Означаваме с $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_n}$.

Сумата на два неколинеарни вектора $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, нанесени с общо начало, е векторът $\overrightarrow{OC}$ - **диагонал на успоредника**, построен върху дадените вектори.



Разлика на два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е трети вектор $\overrightarrow{c}$, за който $\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}$.

Ако $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са нанесени с общо начало, то векторът $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ съединява краищата им и е насочен от края на $\overrightarrow{b}$ към края на $\overrightarrow{a}$.



Произведение на вектор $\overrightarrow{a}$ **с реално число** m наричаме вектор $\overrightarrow{b}$, чиято посока съвпада с посоката на $\overrightarrow{a}$ при $m>0$, противоположна е при $m<0$ и $|\overrightarrow{b}|=|m|.|\overrightarrow{a}|$.

Ако $\overrightarrow{a}$ е ненулев вектор и $\overrightarrow{b}$ е произволен колинеарен с него вектор, то съществува единствено число m, такова че $\overrightarrow{b}=m.\overrightarrow{a}$. Очевидно е, че $m=\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, ако векторите са еднопосочно колинеарни и $m=-\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, ако те са разнопосочно колинеарни.

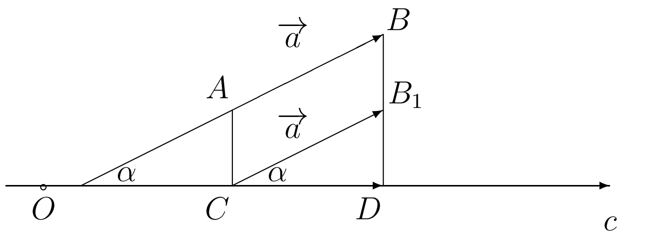
Векторът $\overrightarrow{a^0}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}=\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$ е еднопосочен с вектора $\overrightarrow{a}$ и има дължина единица.

В множеството на векторите въведохме две операции - събиране на вектори и умножение на вектор с число. Лесно може да се провери, че така въведените операции притежават следните осем свойства:

1. $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$ (*комутативен закон за събирането*)
2. $\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}$ (*асоциативен закон за събирането*)
3. $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{o}=\overrightarrow{a}$
4. $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{o}$
5. $\lambda(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$
6. $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{a}$
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{a}=\lambda(\mu\overrightarrow{a})$
8. $1.\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$

Всяко множество от обекти, в което са въведени такива две операции се нарича **векторно пространство**.

Права, на която е избрана посока, се нарича **ос**. Нека са дадени ос c и вектор $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$.



Нека AC и BD са перпендикулярни на оста c и да означим с α ъгъла между вектора $\overrightarrow{a}$ и оста c. Векторът $\overrightarrow{CD}$ наричаме **геометрична проекция на вектора** $\overrightarrow{a}$ върху c.

Алгебрична проекция на вектора $\overrightarrow{a}$ **върху оста** c наричаме дължината на векторната проекция $\overrightarrow{CD}$, взета със знак плюс, ако посоката на $\overrightarrow{CD}$ съвпада с положителната посока на оста и със знак минус когато посоките на $\overrightarrow{CD}$ и c са противоположни.

Алгебричната проекция ще наричаме за краткост само проекция и ще бележим с пр $_c\ \overrightarrow{a}$. От правоъгълния $\triangle\, CDB_1$ се вижда, че проекцията на вектора е равна на дължината на вектора умножена по косинуса на α, т.е.

$$\text{пр}_c\ \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cos \alpha \tag{6.1}$$

Чрез разглеждане на различните възможни случаи лесно може да се докаже, че са в сила следните свойства:

$$\text{пр}_c\ (\lambda \overrightarrow{a}) = \lambda\ \text{пр}_c\ \overrightarrow{a} \tag{6.2}$$

$$\text{пр}_c\ (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \text{пр}_c\ \overrightarrow{a} + \text{пр}_c\ \overrightarrow{b} \tag{6.3}$$

2. Линейна зависимост и независимост на вектори.

Нека $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ е множество от вектори в равнината или вектори в пространството.

Казваме, че векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ са **линейно зависими**, ако съществуват константи $c_1, c_2, ..., c_n$ (поне една различна от нула) такива, че да е изпълнено

$$c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + c_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{o} \tag{6.4}$$

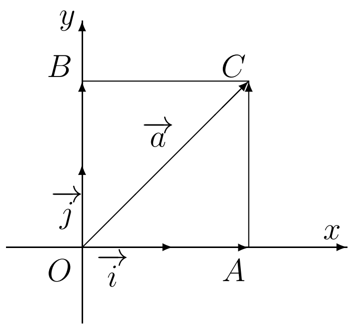
Ако равенството (6.4) е изпълнено само за $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, то векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ се наричат **линейно независими**.

Теорема 6.1 *Два вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са колинеарни. Три вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са компланарни.*

В сила са Теореми 4.1, 4.2 и следствие 4.2.

Подмножество от максимален брой линейно независими вектори образуват **базис**. Броят на векторите в базиса определя размерността на съответното векторно пространство. В следващите редове ще се убедим, че в равнината има базис от 2 вектора и всеки друг вектор се изразява по единствен начин като линейна комбинация на векторите от базиса. Аналогично в пространството има базис от 3 вектора и всеки друг вектор се изразява по единствен начин като линейна комбинация на векторите от базиса.

Да разгледаме равнинния случай. Първо да припомним, че две взаимно-перпендикулярни оси с общо начало O и една и съща единица за дължина образуват декартова правоъгълна координатна система в равнината.



Нека $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ са единични вектори, еднопосочни с координатните оси. Тези два вектора са линейно независими, в противен случай ще следва, че те са колинеарни. Да вземем трети вектор $\overrightarrow{a}$. Имаме две възможности - или $\overrightarrow{a}$ да лежи на някоя от осите или да бъде в общо положение (както е на чертежа). Ако $\overrightarrow{a}$ лежи на някоя от осите, то той и съответния вектор $\overrightarrow{i}$ или $\overrightarrow{j}$ са колинеарни, т.е. линейно зависими, а следователно и трите вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ са линейно зависими. Ако $\overrightarrow{a}$ е в общо положение, то

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

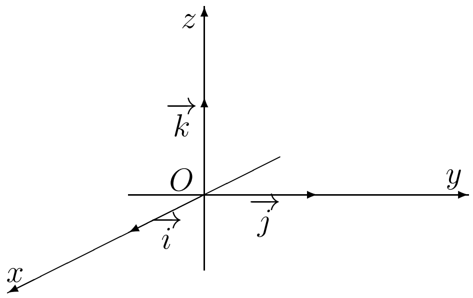
Но $\overrightarrow{OA} = a_1.\overrightarrow{i}$, а $\overrightarrow{OB} = a_2.\overrightarrow{j}$, където a_1 и a_2 са алгебричните проекции на $\overrightarrow{a}$ върху съответните координатни оси. Следователно:

$$\overrightarrow{a} = a_1.\overrightarrow{i} + a_2.\overrightarrow{j}, \tag{6.5}$$

т.е. трите вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ отново са линейно зависими. Следователно векторите $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ образуват базис. Нещо повече, от равенство (6.5) виждаме, че всеки вектор в равнината се представя като линейна комбинация на векторите от базиса. Сега ще покажем, че това представяне е единствено. Наистина, ако допуснем че $\overrightarrow{a} = b_1.\overrightarrow{i} + b_2.\overrightarrow{j}$ ще следва, че $\overrightarrow{o} = (a_1 - b_1).\overrightarrow{i} + (a_2 - b_2).\overrightarrow{j}$ и тъй като $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ са линейно независими, то следва че $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

Числата a_1, a_2 наричаме **координати** на вектора $\overrightarrow{a}$ и означаваме с $\overrightarrow{a}(a_1, a_2)$. Базисните вектори $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ имат съответно координати $\overrightarrow{i}(1, 0)$, $\overrightarrow{j}(0, 1)$.

Три взаимно-перпендикулярни оси с общо начало O и една и съща единица за дължина образуват декартова правоъгълна координатна система в пространството.



Нека $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{k}$ са единични вектори, еднопосочни с координатните оси. Аналогично на предишните разсъждения можем да се убедим, че трите вектора образуват базис и всеки друг вектор в пространството се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}.$$

Числата a_1, a_2, a_3 наричаме **координати** на вектора $\overrightarrow{a}$ и означаваме с

$$\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3).$$

Координатите на вектор са равни на съответните алгебрични проекции на вектора върху координатните оси. Първата координата a_1 се нарича **абсциса**, втората a_2 - **ордината**, а третата a_3 - **апликата**.

Базисните вектори $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{k}$ имат съответно координати $\overrightarrow{i}(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}(0,1,0)$ и $\overrightarrow{k}(0,0,1)$. Тъй като трите вектора са единични и взаимно перпендикулярни, казваме че те образуват **ортонормиран базис**.

Ако са дадени векторите $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$, то

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) \tag{6.6}$$

$$k\overrightarrow{a}(ka_1, ka_2, ka_3). \tag{6.7}$$

От формули (6.6) и (6.7) следва, че координатите на вектор, който е линейна комбинация на дадени вектори, са същите линейни комбинации от съответните координати на дадените вектори.

Координатите на вектора $\overrightarrow{OM}$ наричаме координати на точката M.

Ако са дадени точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то векторът $\overrightarrow{M_1M_2}$ има координати

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{6.8}$$

Координатите на точката M, деляща отсечката M_1M_2 в отношение λ ($\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$) са:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{6.9}$$

Ако M е среда на отсечката M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{6.10}$$

Пример 6.1: Дадени са точките $A(5,3,9)$, $B(-1,3,-3)$, $C(2,-3,5)$, $D(3,1,6)$. Да се намерят координатите на $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ и точката M, за която $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$

Решение: За да намерим координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$, трябва от координатите на втората точка B да извадим координатите на първата A.
Следователно:

$$\overrightarrow{AB}(-6,0,-12), \qquad\qquad \overrightarrow{CD}(1,4,1).$$

Координатите на $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ са $\overrightarrow{c}(-15,-12,-27)$
За да определим координатите на точка M, използваме формули (6.9) при $\lambda = 2$.
Следователно:

$$x_M = \frac{x_A + 2x_B}{3} = 1, \quad y_M = \frac{y_A + 2y_B}{3} = 3, \quad z_M = \frac{z_A + 2z_B}{3} = 1$$

Пример 6.2: Векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са линейно независими. Да се определи дали векторите $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ са линейно зависими или линейно независими.

Решение: Записваме основното дефиниционно равенство (6.4) за векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$

$$c_1\overrightarrow{p} + c_2\overrightarrow{q} + c_3\overrightarrow{r} = \overrightarrow{o}$$

Следователно:

$$c_1(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + c_2(-\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + c_3(2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{o}$$

Преобразуваме и получаваме

$$(2c_1 - c_2 + 2c_3)\overrightarrow{a} + (-c_1 + 2c_2 + 2c_3)\overrightarrow{b} + (-c_1 - c_2 + c_3)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$$

Но векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ са линейно независими. Следователно последното равенство е възможно само ако коефициентите в скобите са нули.

$$\left| \begin{array}{rcrcrcl} 2c_1 & - & c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ -c_1 & + & 2c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ -c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

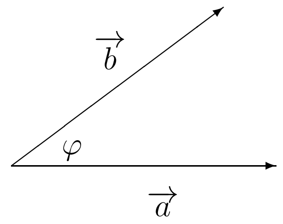
Ако тази хомогенна система от три уравнения с три неизвестни има ненулево решение, то векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ ще са линейно зависими. Ако има само нулевото решение, то те ще са линейно независими.
Тъй като детерминантата на системата

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0,$$

то според формулите на Крамер (Глава 5, Теорема 5.1) системата има само нулевото решение и следователно трите вектора са линейно независими.

3. Скаларно и векторно произведение на два вектора. Смесено произведение на три вектора.

Нека са дадени два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и нека ъгълът между тях е φ. Да означим с a и b осите, определени съответно от двата вектора.



Дефиниция 6.1 ***Скаларно произведение*** *на векторите* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *наричаме числото*

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}|np_{\,a}\ \vec{b} = |\vec{b}|np_{\,b}\ \vec{a} \qquad (6.11)$$

Свойства:

1. $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0, \qquad \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$

2. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

3. $(\lambda\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$

4. $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

Свойства 1 и 2 са очевидни. Ще докажем верността на свойства 3 и 4.

Доказателство: 3. От (6.11) и (6.2) имаме

$$(\lambda\vec{a}).\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_b\,(\lambda\vec{a}) = |\vec{b}|\lambda\text{пр}_b\ \vec{a} = \lambda|\vec{b}|\text{пр}_b\ \vec{a} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$$

$$\vec{a}.(\lambda\vec{b}) = |\vec{a}|\text{пр}_a\,(\lambda\vec{b}) = |\vec{a}|\lambda\text{пр}_a\ \vec{b} = \lambda|\vec{a}|\text{пр}_a\ \vec{b} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$$

4. От (6.11) и (6.3) имаме

$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|\text{пр}_a(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|(\text{пр}_a\vec{b} + \text{пр}_a\vec{c})) =$$

$$= |\vec{a}|\text{пр}_a\vec{b} + |\vec{a}|\text{пр}_a\vec{c} = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$$

■

Теорема 6.2 *Два ненулеви вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са перпендикулярни тогава и само тогава, когато тяхното скаларно произведение е равно на нула.*

Доказателство: 1. Нека $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тогава $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\frac{\pi}{2} = 0.$

2. Нека $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$. Но $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$. Това означава, че $\cos\varphi = 0$. Следователно $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. ■

Използвайки дефиницията на скаларно произведение, свойство 2 и теорема 6.2 лесно можем да пресметнем скаларните произведения между ортонормираните базисни вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Получаваме:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}.\vec{i} = 1, & \vec{j}.\vec{i} = 0, & \vec{k}.\vec{i} = 0, \\ \vec{i}.\vec{j} = 0, & \vec{j}.\vec{j} = 1, & \vec{k}.\vec{j} = 0, \\ \vec{i}.\vec{k} = 0, & \vec{j}.\vec{k} = 0, & \vec{k}.\vec{k} = 1. \end{array}$$

Следователно, ако векторите $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$ са зададени с координатите си, то

$$\overrightarrow{a}.\ \overrightarrow{b} = (a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}).(b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{6.12}$$

Приложения на скаларното произведение:

1. Дължина на вектор: Нека $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$.

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} \tag{6.13}$$

2. Разстояние между две точки: Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две точки в пространството. Тогава

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{6.14}$$

3. Ъгъл между два вектора:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}} \tag{6.15}$$

4. Директорни косинуси на вектор:

Нека вектор $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ сключва с осите Ox, Oy и Oz съответно ъгли α, β и γ. Тогава

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{i}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{j}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{j}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{k}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

Следователно

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ако $\overrightarrow{a}$ е единичен вектор ($\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} = 1$), получаваме че $a_1 = \cos\alpha$, $a_2 = \cos\beta$ и $a_3 = \cos\gamma$, т.е. директорните косинуси са координатите на единичния вектор по направление на вектора $\overrightarrow{a}$.

5. Пресмятане работата на сила: Нека на материална точка е приложена сила $\overrightarrow{F}$, която премества точката от точка O до точка B, т.е. на разстояние $|\overrightarrow{s}| = |\overrightarrow{OB}|$. Тогава работата A, която силата извършва е равна на скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{s}$, т.е. $A = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{s}$.

<u>*Пример 6.3*</u>: Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(2, -1, 2)$ и $\overrightarrow{b}(6, -3, 2)$. Пресметнете $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ и директорните косинуси на $\overrightarrow{a}$.

Решение: 1. Скаларното произведение пресмятаме по формула (6.12) и получаваме

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 2.6 + (-1)(-3) + 2.2 = 12 + 3 + 4 = 19.$$

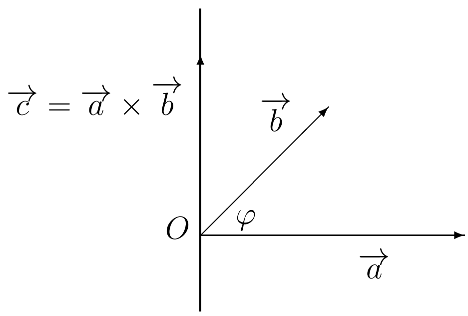
2. Дължините на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пресмятаме по формула (6.13) и получаваме

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7.$$

3. Ъгълът между двата вектора пресмятаме по формула (6.15) и получаваме

$$\cos\,\varphi = \frac{19}{21}.$$

4. Пресмятаме координатите на $\vec{a}^0\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Следователно $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{-1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$, което показва, че векторът $\vec{a}$ сключва равни остри ъгли с осите Ox и Oz и тъп ъгъл с оста Oy.



Дефиниция 6.2 ***Векторно произведение*** *на векторите* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *наричаме трети вектор* $\vec{c}$, *определен от условията:*

1) *Векторът* $\vec{c}$ *е перпендикулярен на векторите* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

2) *Посоката на вектора* $\vec{c}$ *е такава, че векторите* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *да образуват дясно-ориентирана тройка.*

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

Векторното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означаваме с $\vec{a} \times \vec{b}$.

1. Първото условие в дефиницията на векторното произведение означава, че векторът $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ е перпендикулярен на равнината, определена от двата вектора.

2. Условието трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (в дадения ред) да образуват дясно-ориентирана тройка означава следното: при наблюдение от края на третия вектор $\vec{c}$ завъртането на първия вектор $\vec{a}$ на ъгъл по-малък от 180° до съвпадането му с втория вектор $\vec{b}$ се вижда в посока, обратна на часовниковата стрелка. Тази посока в математиката е приета за положителна.

3. Третото условие показва каква е дължината на новия вектор. Тя е равна на лицето на успоредника, определен от двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства:

$$\mathbf{1.}\quad \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$$

$$\mathbf{2.}\quad (\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$$

$$\mathbf{3.}\quad \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$$

Свойство 3 ще приемем без доказателство. Ще докажем верността на свойства 1 и 2.

Доказателство: 1. Нека $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, а $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$. От дефиницията на векторно произведение следва, че двата вектора са перпендикулярни на равнината, определена от векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, имат равни дължини, но противоположни посоки.

2. Ще докажем първо равенството $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$, като разгледаме три случая: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

Ако $\lambda = 0$, получаваме $\overrightarrow{o} = \overrightarrow{o}$.

Ако $\lambda > 0$, векторите $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}$ и $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ са еднопосочно колинеарни с вектора $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ и имат равни дължини $|\lambda||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$. Следователно са равни.

Ако $\lambda < 0$, векторите $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}$ и $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ са разнопосочно колинеарни с вектора $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ и отново имат равни дължини $|\lambda||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$, т.е. пак са равни.

Равенството $\overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ следва от вече доказаното и свойство 1. Наистина:

$$\overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = -(\lambda \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a} = -\lambda(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}) = -(-\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$$

Теорема 6.3 *Векторното произведение на два ненулеви вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е равно на $\overrightarrow{o}$ тогава и само тогава, когато те са колинеарни.*

Доказателство: 1. Нека векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са колинеарни. Следователно $\sphericalangle\varphi = 0$ или $\sphericalangle\varphi = \pi$. Тогава $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi = 0$. Следователно $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$.

2. Нека $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$. Тогава $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi = 0$. Но $|\overrightarrow{a}| \neq 0$ и $|\overrightarrow{b}| \neq 0$. Това означава, че $\sin\varphi = 0$. Следователно $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т.е. $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са колинеарни.

■

Използвайки дефиницията на векторно произведение, свойство 1 и теорема 6.3 лесно можем да пресметнем векторните произведения между базисните вектори $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{k}$. Получаваме:

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{o}, & \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}, \\
\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{o}, & \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}, \\
\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}, & \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{o}.
\end{array}$$

Следователно, ако векторите $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$ са зададени с координатите си, то

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}) \times (b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j} + b_3 \overrightarrow{k}) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k},$$

което лесно можем да запомним чрез използване на детерминанта

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \tag{6.16}$$

Пример 6.4: Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(2,-1,2)$ и $\overrightarrow{b}(6,-3,2)$. Пресметнете $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ и $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$.

Решение: 1. Векторното произведение пресмятаме по формула (6.16) и получаваме

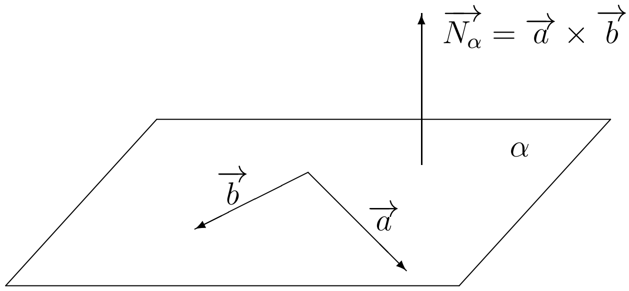
$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = 4\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}.$$

2. Дължината на вектора $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ пресмятаме по формула (6.13) и получаваме

$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

Приложения на векторното произведение:

1. Нормален вектор на равнина: Нека са дадени векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и нека определената от тях равнина означим с α. Тогава $\overrightarrow{N}_\alpha = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ е перпендикулярен (нормален) на равнината.



2. Пресмятане момент на сила: Нека твърдо тяло е закрепено неподвижно в точка A, а в точка B на тялото е приложена сила $\overrightarrow{F}$. Тогава в точка A възниква въртящ момент $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F}$.

Пример 6.5: Твърдо тяло е закрепено в точката $A(2,1,3)$, а в точка $B(0,1,3)$ е приложена сила $\overrightarrow{F}(0,4,3)$. Намерете момента на силата относно точка A и неговата големина.

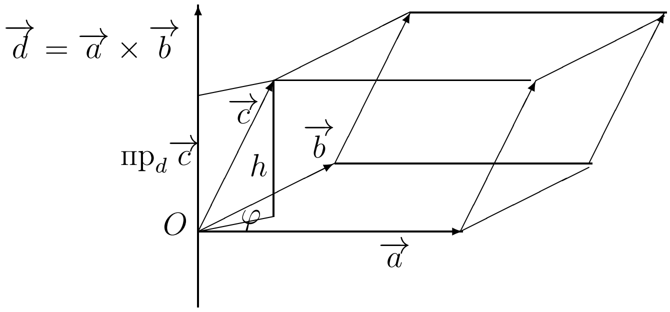
Решение:
Намираме координатите на вектор $\overrightarrow{AB}(-2,0,0)$ и пресмятаме

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\overrightarrow{j} - 8\overrightarrow{k}$$

Големината на момента е $\left|\overrightarrow{M}\right| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.

Дефиниция 6.3 ***Смесено произведение*** *на три вектора $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ наричаме числото, получено от умножаването на първите два вектора векторно, след което получения вектор е умножен с третия вектор скаларно, т.е*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}$$



Нека трите вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни. Тогава векторът $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ е перпендикулярен на равнината, определена от $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, и големината му е равна на лицето на успоредника, определен от двата вектора. Скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{d}$ и $\overrightarrow{c}$ се получава като умножим дължината на $\overrightarrow{d}$ по проекцията на $\overrightarrow{c}$ върху оста, определена от $\overrightarrow{d}$. Но големината на тази проекция е равна на дължината на височината h на паралелепипеда, който трите вектора образуват. Следователно получихме, че обемът на паралелепипеда, определен от трите вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ е равен на $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|$.

Ако $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c}(c_1, c_2, c_3)$, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) =$

$$= ((a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k}).(c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{6.17}$$

Свойства:

1. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = -(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$

2. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a})$

Доказателство: Доказателството на двете свойства следва непосредствено от (6.17) и познатото ни свойство, че при разместване на два реда на една детерминанта помежду им, тя променя само своя знак.

Теорема 6.4 *Необходимото и достатъчно условие три вектора $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ да са компланарни е тяхното смесено произведение да бъде равно на нула.*

Доказателство: 1. Нека трите вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са компланарни. Това означава, че единият от тях се изразява като линейна комбинация на останалите два вектора. Но тогава единият от редовете на детерминантата (6.17) ще бъде линейна комбинация на останалите два реда, а това както знаем означава, че детерминантата е равна на нула, т.е. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$.

2. Обратно, нека сега $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$. Но тогава от Теорема 4.6 (Глава 4) следва, че някой ред на детерминантата (6.17) е линейна комбинация на останалите два реда, т.е. трите вектора са компланарни. ■

Теорема 6.4 има следното геометрично тълкуване: щом смесеното произведение на трите вектора е нула, това означава, че обемът на паралелепипеда е нула, т.е. трите вектора не образуват паралелепипед. Следователно трите вектора лежат в една равнина.

1. Чрез скаларното произведение лесно можем да проверим дали два вектора са перпендикулярни, да пресметнем дължината на вектор и ъгъла между два вектора.

2. Чрез векторното произведение лесно можем да получим вектор, перпендикулярен на равнината, определена от два неколинеарни вектора и да пресметнем лицето на успоредник или триъгълник.

3. Чрез смесеното произведение лесно можем да проверим дали четири точки лежат в една равнина, както и да пресметнем обема на паралелепипед или пирамида.

Пример 6.6: Дадени са точките $A(1, -5, 4)$, $B(0, -3, 1)$, $C(-2, -4, 3)$, $D(3.5, 0, -4.5)$, $E(4, 4, -2)$.

1) Да се намери $\sphericalangle ABC$.
2) Да се намери лицето на $\triangle ABC$.
3) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DE}$ са перпендикулярни.
4) Да се намери вектор $\overrightarrow{x}$ с дължина $\sqrt{10}$, перпендикулярен на равнината, определена от точките A, B, C.
5) Да се докаже, че точките A, B, C и D лежат в една равнина, а точката E не лежи в тази равнина.
6) Да се намери обема на тетраедъра $ABCE$.

Решение:

1) Намираме координатите на векторите $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ и прилагаме формула (6.15).

$$\overrightarrow{BA}(1, -2, 3), \quad \overrightarrow{BC}(-2, -1, 2)$$

$$\cos\sphericalangle ABC = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-2+2+6}{\sqrt{14}.\sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

2)

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -2 & 3\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-1\,\overrightarrow{i}-8\,\overrightarrow{j}-5\,\overrightarrow{k}$$

$$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+(-8)^2+(-5)^2}=3\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

3) Намираме координатите на векторите $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DE}$ и проверяваме дали скаларното произведение е нула.

$$\overrightarrow{BD}(\ \frac{7}{2},\ 3,\ \frac{-11}{2},\ )\qquad \overrightarrow{DE}(\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{5}{2}\ )$$

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE}=\frac{7}{4}+12-\frac{55}{4}=0$$

Следователно $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{DE}$.

4) $\overrightarrow{x}\perp\overrightarrow{BA},\quad \overrightarrow{x}\perp\overrightarrow{BC}$

$\Longrightarrow\ \overrightarrow{x}||(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC})$

$\Longrightarrow\ \overrightarrow{x}=k(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC})$

$\Longrightarrow\ \overrightarrow{x}(-k,-8k,-5k)$

$\Longrightarrow\ |\overrightarrow{x}|=\sqrt{k^2+64k^2+25k^2}=3|k|\sqrt{10}$

$\Longrightarrow\ |k|=\frac{1}{3}\ ,\ k=\pm\frac{1}{3}$

$\Longrightarrow\ \overrightarrow{x}(\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{8}{3},\ \pm\frac{5}{3}\ )$

5)

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & -1 & 2\\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{-11}{2}\end{vmatrix}=0$$

Тъй като смесеното произведение на трите вектора е нула, тези три вектора лежат в една равнина. Следователно и точките $A,\ B,\ C,\ D$ също лежат в една равнина.

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & -1 & 2\\ 4 & 7 & -3\end{vmatrix}=-45\neq 0$$

Следователно точките A, B, C и E не лежат в една равнина.

б)

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})| = \frac{45}{6}$$

ЗАДАЧИ

6.1. Координатите на върховете на триъгълник са $A(1,-5)$, $B(3,-7)$ и $C(5,-3)$. Намерете координатите на центъра на тежестта на триъгълника.

Решение: Център на тежестта (медицентър) на триъгълник се нарича пресечната точка на медианите. Ако O е произволна точка, а центъра на тежестта означим с G , то е в сила следното векторно равенство

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

От тук следва, че координатите на центъра на тежестта се получават, като се съберат съответните координати на трите върха и сумата се раздели на три. Следователно

$$G(3,-5).$$

6.2. Дадени са точките $A(3,4,-2)$, $M(0,2,1)$ и $N(4,2,3)$. Да се намерят точките B и C така, че M да бъде център на тежестта на триъгълник ABC, а N среда на страната AB.

Решение: Нека координатите на точките B и C са

$$B(x_1, y_1, z_1) \qquad C(x_2, y_2, z_2).$$

Тъй като N е среда на отсечката AB, то от формулите за среда на отсечка (формули (6.10)) следва

$$\frac{3+x_1}{2} = 4, \quad \frac{4+y_1}{2} = 2, \quad \frac{-2+z_1}{2} = 3.$$

Следователно

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 8, \qquad \text{т.е. } B(5,0,8).$$

Сега като използваме предната задача, получаваме:

$$\frac{3+5+x_2}{3} = 0, \quad \frac{4+0+y_2}{3} = 2, \quad \frac{-2+8+z_2}{3} = 1.$$

Следователно

$$x_2 = -8, \quad y_2 = 2, \quad z_2 = -3, \qquad \text{т.е. } C(-8,2,-3).$$

6.3. Да се намерят вектори, насочени по ъглополовящите на ъгла, образуван от векторите $\overrightarrow{a}(2,-2,1)$ и $\overrightarrow{b}(2,4,-4)$.

Решение: Ако два вектора с общо начало имат равни дължини, то тяхната сума и тяхната разлика са вектори, насочени по ъглополовящите съответно на вътрешния и външния ъгъл, образувани от двата вектора. Следователно, за да получим вектори, насочени по ъглополовящите, можем да съберем и извадим съответно единичните вектори по посока на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Пресмятаме дължините на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ по формула (6.13) и получаваме

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad |\overrightarrow{b}| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6.$$

Следователно

$$\overrightarrow{a^0}\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \overrightarrow{b^0}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Вектори, насочени по ъглополовящите са

$$\overrightarrow{l_1} = \overrightarrow{a^0} + \overrightarrow{b^0}, \qquad \overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{a^0} - \overrightarrow{b^0}$$

Следователно

$$\overrightarrow{l_1}(1, 0, \frac{-1}{3}), \qquad \overrightarrow{l_2}(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 1)$$

6.4. Да се намери вектор, който е перпендикулярен на векторите $\overrightarrow{a}(2,-3,1)$ и $\overrightarrow{b}(1,-2,3)$, а скаларното му произведение с вектора $\overrightarrow{d}(1,2,-7)$ е равно на 10.

Решение: Както знаем, векторното произведение на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е вектор, перпендикулярен на двата вектора.
Пресмятаме

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} - 1\overrightarrow{k}.$$

Векторът $\overrightarrow{x}(x_1, y_1, z_1)$, който търсим, също е перпендикулярен на двата вектора и следователно векторите $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{c}$ са колинеарни, т.е. $\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{c}(-7k, -5k, -k)$.

От условието $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{d} = 10$ получаваме

$$-7k - 10k + 7k = 10 \qquad \Longrightarrow \qquad k = -1.$$

Следователно

$$\overrightarrow{x}(7, 5, 1).$$

6.5. Да се намери дължината на височината през върха B на триъгълник ABC, ако $A(1,-2,8)$, $B(0,0,4)$, $C(6,2,0)$.

Решение: Да означим дължината на височината от върха B с h_b. Тогава

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|.h_b.$$

От друга страна (виж трета точка от коментара след дефиницията на векторно произведение)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Като приравним двете формули за лице на триъгълник, получаваме

$$h_b = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$$

Пресмятаме:

1. $\overrightarrow{AC}(5, 4, -8), \quad \overrightarrow{AB}(-1, 2, -4)$

2. $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = 28\,\overrightarrow{j} + 14\,\overrightarrow{k}$

3. $|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$

4. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25 + 16 + 64} = \sqrt{105}$

Следователно

$$h_b = \frac{\sqrt{980}}{\sqrt{105}} = \sqrt{\frac{980}{105}} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$$

6.6. Дадени са точките $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Намерете дължината на височината, спусната от върха D на тетраедъра $ABCD$.
Решение:

1. $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$, $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$, $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

2.
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308$$

3. Да означим дължината на височината от върха D с h. Тогава:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.h$$

4. От друга страна

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

Следователно

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

5.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\overrightarrow{i} - 24\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k}$$

6.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28$$

Следователно

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{308}{28} = 11.$$

Задачи за самостоятелна работа:

6.7. Какви условия трябва да удовлетворяват векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, за да са в сила съотношенията:

а) $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$
б) $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| > |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$
в) $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| < |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$
г) $\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$
д) Векторът $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ да разполовява ъгъла между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$

Отг. а) перпендикулярни
б) сключват остър ъгъл
в) сключват тъп ъгъл
г) еднопосочни
д) $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$

6.8. Проверете дали точките $A(3, 2, -1), B(2, 4, 2)$ и $C(0, 8, 8)$ лежат на една права.

Отг. Да.

6.9. Проверете дали точките $A(1, 3, 5)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(4, -2, 3)$ и $D(-2, 2, 4)$ могат да бъдат последователни върхове на трапец.

Отг. Не.

6.10. Точките $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$ са последователни върхове на успоредник. Намерете координатите на четвъртия връх.

Отг. $D(-1, 1, 1)$

6.11. Дадени са върховете на четириъгълника $ABCD$: $A(-2,14)$, $B(4,-2)$, $C(6,-2)$ и $D(6,10)$. Определете координатите на пресечната точка на диагоналите му.

Отг. $M(\dfrac{9}{2},1)$

6.12. Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(1,2,0)$, $\overrightarrow{b}(-1,2,1)$ и $\overrightarrow{c}(1,3,4)$. Изследвайте дали те са линейно зависими. Може ли векторът $\overrightarrow{d}(-2,7,-1)$ да се представи като линейна комбинация на $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$?

Отг. Линейно независими.
$\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

6.13. Да се определи λ така, че векторите $\overrightarrow{a}(2,3,-2\lambda)$, $\overrightarrow{b}(\lambda,1,1)$ и $\overrightarrow{c}(3,2,2)$ да са линейно зависими. Да се изрази векторът $\overrightarrow{c}$ чрез $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Отг. $\lambda = \dfrac{3}{2}$, $\overrightarrow{c} = 0\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$

6.14. Векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ образуват ъгъл $\dfrac{2\pi}{3}$. Ако $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 4$, да се пресметне:

а) $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$

б) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2$

в) $(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$

Отг. а) -6 б) 13 в) -11

6.15. Дадени са точките $A(4,1,5)$ и $B(-2,-2,3)$. Намерете дължината на вектора $\overrightarrow{AB}$.

Отг. 7

6.16. Точките $A(-4,1,1)$, $B(-5,-5,3)$, $C(2,-3,1)$, $D(1,4,0)$ са върхове на тетраедър. Покажете, че два срещуположни ръба на тетраедъра са перпендикулярни.

6.17. Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(2,-1,3)$, $\overrightarrow{b}(1,-3,2)$, $\overrightarrow{c}(3,2,-4)$. Да се намери вектор $\overrightarrow{x}$, за който: $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{a} = -5$, $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{b} = -11$, $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{c} = 20$.

Отг. $\overrightarrow{x}(2,3,-2)$

6.18. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$: $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,5)$.

Отг. $\measuredangle A = \dfrac{\pi}{2}$, $\measuredangle B = \measuredangle C = \dfrac{\pi}{4}$

6.19. Дадени са векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, за които: $|\overrightarrow{a}| = 10$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 6$. Да се намери дължината на векторното им произведение.

Отг. 8

6.20. Да се намери вектор $\overrightarrow{m}$, който е перпендикулярен на векторите $\overrightarrow{a}(4,-2,-3)$ и $\overrightarrow{b}(0,1,3)$, има дължина 26 и сключва тъп ъгъл с положителната посока на оста Oy.

Отг. $\overrightarrow{m}(-6,-24,8)$

6.21. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако:

а) $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(4,3,5)$

б) $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$

Отг. а) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ б) 14

6.22. Да се намери обемът на тетраедъра $ABCD$, ако:

а) $A(3,-1,5)$, $B(5,2,6)$, $C(-1,3,4)$, $D(7,3,-1)$

б) $A(3,2,4)$, $B(1,-2,1)$, $C(7,9,4)$, $D(5,4,3)$

Отг. а) 26 б) $\dfrac{8}{3}$

6.23. Докажете, че точките $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$ и $D(1,5,0)$ лежат в една равнина. Намерете вектор $\overrightarrow{n}$, перпендикулярен на тази равнина и с дължина $\sqrt{5}$.

Отг. $\overrightarrow{n_1}(1,0,2)$, $\overrightarrow{n_2}(-1,0,-2)$

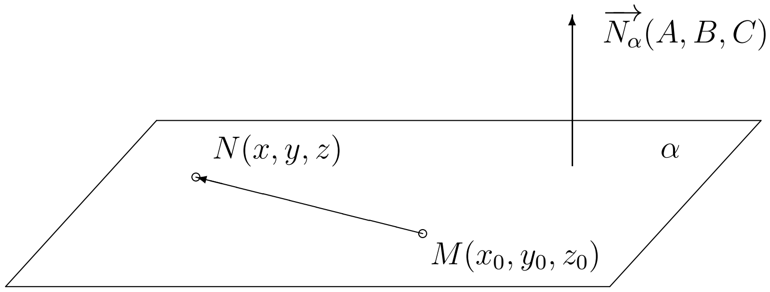
Глава 7

Равнина и права в пространството

Целта на тази глава е да запознае читателя с различните видове уравнения на равнина и права в пространството. След усвояване на материала вие ще можете да съставяте уравнения на равнина и на права, определени чрез дадени елементи; да определяте взаимното положение на равнини и прави; да решавате основни задачи за равнини и прави в пространството.

7.1 Уравнения на равнина

1. Уравнение на равнина α***, определена чрез точка*** $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ ***и нормален вектор*** $\overrightarrow{N_\alpha}(A, B, C)$.



Нека $N(x, y, z)$ е произволна точка от α. Векторът $\overrightarrow{MN}$ лежи в равнината α тогава и само тогава, когато векторите $\overrightarrow{N_\alpha}(A, B, C)$ и $\overrightarrow{MN}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ са перпендикулярни. Но от Глава 6 знаем, че два вектора са перпендикулярни тогава и само тогава, когато тяхното скаларно произведение е равно на нула. Следователно

$$N(x, y, z) \in \alpha \Longleftrightarrow \overrightarrow{N_\alpha}.\overrightarrow{MN} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т.е. уравнението на равнината α е

$$\alpha : \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{7.1}$$

2. Общо уравнение на равнина α.

В уравнението $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ разкриваме скобите и означаваме $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Получаваме

$$\alpha : \quad Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7.2}$$

Теорема 7.1 *Всяка равнина в пространството има уравнение от вида (7.2) и всяко уравнение от вида (7.2), при допълнителното условие* $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, *е уравнение на равнина в пространството.*

3. Отрезово уравнение на равнина α.

Нека равнината α не е успоредна на никоя от координатните оси и не минава през началото на координатната система, т.е. коефициентите A, B, C и D в (7.2) са различни от нула. Тогава уравнението (7.2) можем да преобразуваме по следния начин: $Ax + By + Cz = -D$

$$\frac{x}{\left(\frac{-D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-D}{B}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-D}{C}\right)} = 1$$

Полагаме

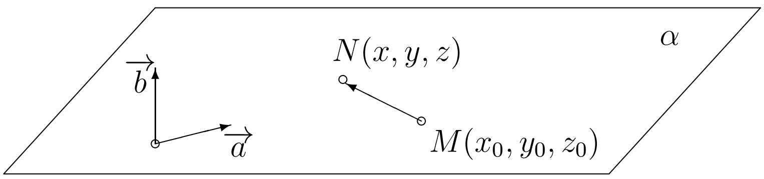
$$m = \frac{-D}{A}, \quad n = \frac{-D}{B}, \quad p = \frac{-D}{C}$$

и получаваме

$$\alpha : \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \tag{7.3}$$

($(m, n, p \neq 0$ са отрезите, които равнината отсича от координатните оси.)

4. Уравнение на равнина α*, определена чрез точка* $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ *и два неколинеарни вектора* $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$, *успоредни на равнината.*



Нека $N(x, y, z)$ е произволна точка от α. Тогава векторите $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са компланарни. Но от Глава 6 знаем, че необходимото и достатъчно условие три вектора да са компланарни е тяхното смесено произведение да бъда равно на нула. Следователно

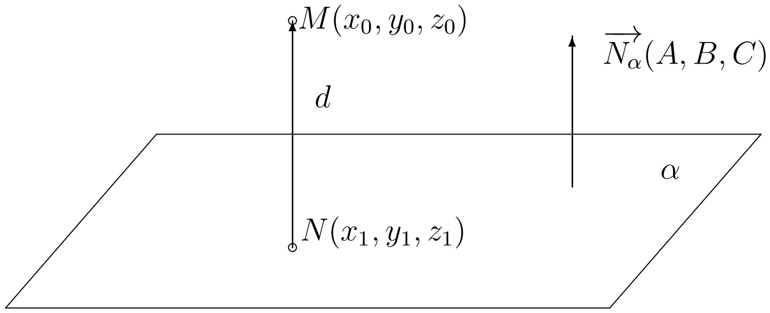
$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.4}$$

5. Уравнение на равнина α*, определена чрез три различни точки* $M(x_0, y_0, z_0)$, $N(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$, *нележащи на една права.*

Нека $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{MN}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{MP}(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$. Прилагаме (7.4) и получаваме

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.5}$$

6. Разстояние от точка $M(x_0, y_0, z_0)$ ***до равнина*** $\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0$.



Да означим ортогоналната проекция на точката $M(x_0, y_0, z_0)$ върху равнината α с $N(x_1, y_1, z_1)$ и нека $d = |\overrightarrow{MN}|$. От това, че $N(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$ следва $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Следователно $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$.

Да пресметнем по два начина скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{N}_\alpha(A, B, C)$ и $\overrightarrow{NM}(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$. Отчитайки факта, че ъгълът между векторите $\overrightarrow{N}_\alpha$ и $\overrightarrow{M}N$ е 0 или π и прилагайки дефиницията за скаларно произведение на два вектора, получаваме

$$\overrightarrow{N}_\alpha.\overrightarrow{NM} = \pm d.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

От формулата за скаларно произведение на два вектора имаме

$$\overrightarrow{N}_\alpha.\overrightarrow{NM} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$

Приравняваме десните страни на горните две равенства и като използваме, че $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$ получаваме

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{7.6}$$

Пример 7.1: Да се напише уравнението на равнина α, която минава през точката $A(3, -3, 1)$ и е перпендикулярна на вектора $\overrightarrow{a}(2, -1, -2)$.

Решение: Равнината е определена от точката $A(3, -3, 1)$ и нормален вектор $\overrightarrow{N_\alpha} = \overrightarrow{a}(2, -1, -2)$. От формула (7.1) следва, че уравнението на равнината е

$$\alpha: \ 2(x - 3) - (y + 3) - 2(z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad 2x - y - 2z - 7 = 0.$$

Пример 7.2: Да се напише уравнението на равнина α, която минава през точката $A(2, -3, 2)$ и е успоредна на векторите $\overrightarrow{a}(3, -2, -1)$ и $\overrightarrow{b}(2, 1, -1)$.

Решение: Векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ не са колинеарни и според (7.4) уравнението на равнината е

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: \ 3x + y + 7z - 17 = 0.$$

Пример 7.3: Да се напише уравнението на равнина α, определена от точките $A(1,3,2)$, $B(3,5,3)$, $C(2,2,-1)$.

Решение: Прилагаме формула (7.5) и получаваме

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: \ 5x - 7y + 4z + 8 = 0.$$

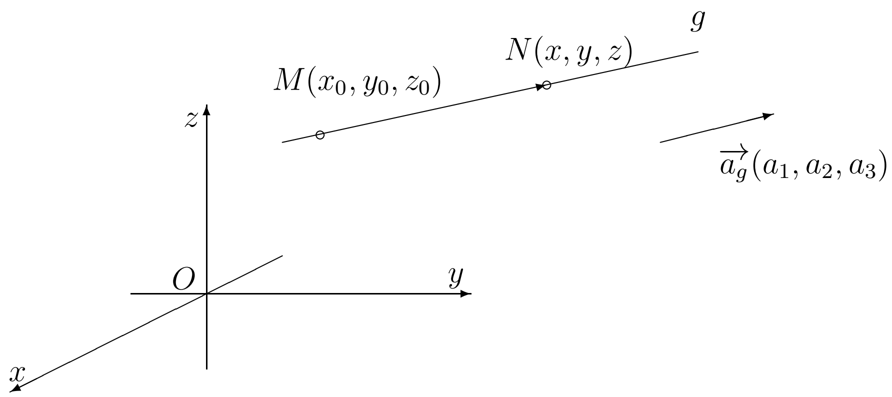
Пример 7.4: Да се намери разстоянието от точката $A(2,-2,4)$ до равнината $\alpha: \ 2x + 2y - z - 14 = 0$.

Решение: Прилагаме формула (7.6) и получаваме

$$d = \frac{|2.2 + 2.(-2) - 1.4 - 14|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-18|}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

7.2 Уравнения на права

1. Уравнения на права g, ***определена чрез точка*** $M(x_0, y_0, z_0) \in g$ ***и направляващ вектор*** $\overrightarrow{a_g}(a_1, a_2, a_3)$.



Нека $N(x,y,z)$ е произволна точка от g. Тогава векторите $\overrightarrow{MN}\ (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и $\overrightarrow{a}_g(a_1, a_2, a_3)$ са колинеарни. Това означава, че $\overrightarrow{MN} = t.\overrightarrow{a}_g$, $-\infty < t < +\infty$. Следователно

$$g: \begin{cases} x = & x_0 & + & a_1.t \\ y = & y_0 & + & a_2.t \\ z = & z_0 & + & a_3.t \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty \tag{7.7}$$

Уравненията (7.7) се наричат скаларно-параметрични уравнения на правата g.

2. Канонични уравнения на права g, ***определена от точка*** $M(x_0, y_0, z_0) \in g$ ***и направляващ вектор*** $\overrightarrow{a_g}(a_1, a_2, a_3)$.

$$g: \quad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{7.8}$$

3. Уравнения на права g, ***определена чрез две различни точки*** $M(x_0, y_0, z_0)$ ***и*** $N(x_1, y_1, z_1)$.
Векторът $\overrightarrow{MN}\,(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ е направляващ вектор за правата. Прилагаме предишната формула (7.8) и получаваме

$$g: \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{7.9}$$

В уравненията (7.8) и (7.9) дробната черта не трябва да се възприема като знак за деление. Това е само едно символично означение. В знаменателите стоят координатите на направляващия вектор за правата и ако има нула в някой от знаменателите, това просто означава че съответната координата на вектора е нула.

Пример 7.5: Да се напишат каноничните уравнения на правата g, която минава през точката $A(1, -2, 3)$ и има направляващ вектор $\overrightarrow{a_g}(3, -1, 2)$.

Решение: Прилагаме формула (7.8):

$$g: \quad \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 3}{2}.$$

Пример 7.6: Да се напишат уравненията на правата g, която минава през точките $A(3, -4, 1)$ и $B(1, -5, 4)$.

Решение: Векторът $\overrightarrow{AB}(-2, -1, 3)$ е направляващ вектор за правата и нейните канонични уравнения са

$$g: \quad \frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 4}{-1} = \frac{z - 1}{3}.$$

Пример 7.7: Да се напишат скаларно-параметричните уравнения на правата g, която минава през точката $A(2, -2, 3)$ и е перпендикулярна на равнината $\alpha: 3x + 2y - z + 11 = 0$.

Решение: Тъй като правата g е перпендикулярна на равнината α, то нормалният вектор на равнината $\overrightarrow{N_\alpha}(3, 2, -1)$ е направляващ вектор за правата. Следователно скаларно-параметричните уравнения са

$$g: \quad \begin{cases} x = \ \ 2 + 3.t \\ y = -2 + 2.t \\ z = \ \ 3 - t \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty$$

Пример 7.8: Да се напише уравнението на равнината α, определена от точката $A(2,1,3)$ и правата $p: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{-1}$.

Решение: Направляващ вектор на правата p е векторът $\overrightarrow{a_p}(1,3,-1)$ и точката $B(1,-2,0)$ лежи на правата. Намираме координатите на вектор $\overrightarrow{AB}(-1,-3,-3)$. Следователно можем да напишем уравнението на равнината по формула (7.4)

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: \ 3x - y - 5 = 0.$$

Пример 7.9: Да се напише уравнението на равнината α, определена от успоредните прави

$$p: \ \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$$

и

$$q: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

Решение: Направляващ вектор на правата p е векторът $\overrightarrow{a_p}(2,1,3)$, а точката $A(-2,-1,3)$ лежи на правата p. Точката $B(1,0,-1)$ лежи на правата q. Намираме координатите на вектор $\overrightarrow{AB}$ $(3,1,-4)$. Сега можем да напишем уравнението на равнината, използвайки формула (7.4)

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: \ 7x - 17y + z - 6 = 0.$$

7.3 Взаимни положения на прави и равнини

1. Взаимни положения на две равнини

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \textbf{\textit{и}} \quad \beta: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

а) Ако нормалните вектори $\overrightarrow{N_\alpha}(A,B,C)$ и $\overrightarrow{N_\beta}(A_1,B_1,C_1)$ не са успоредни, т.е. няма пропорционалност между съответните им координати, то двете равнини се пресичат.

б) Ако $\overrightarrow{N_\alpha} = k\overrightarrow{N_\beta}$, но $D \neq kD_1$, то двете равнини са успоредни.

в) Ако $\overrightarrow{N_\alpha} = k\overrightarrow{N_\beta}$ и $D = kD_1$, то двете равнини се сливат.

2. Пробод на права

$$g: \begin{cases} x = & x_0 & + & a_1.t \\ y = & y_0 & + & a_2.t \\ z = & z_0 & + & a_3.t \end{cases} \tag{7.10}$$

с равнина

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7.11}$$

За да намерим пробода на правата g с равнината α, трябва да решим системата от уравненията (7.10) и (7.11). За тази цел заместваме x, y, z от (7.10) в уравнението на равнината (7.11) и получаваме следното линейно уравнение за параметъра t

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

- Ако това уравнение има едно решение t_0, то правата пробожда равнината и пробода намираме, като заместим t в (7.10) с t_0.

- Ако това уравнение няма решение, то правата и равнината нямат общи точки, т.е. тя е успоредна на равнината.

- Ако това уравнение има безброй много решения, то правата лежи в равнината.

3. Взаимни положения на две прави

$$p: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad \textbf{\textit{и}} \qquad g: \frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3}$$

Две прави се наричат **кръстосани,** ако не лежат в една равнина.

Разглеждаме векторите $\overrightarrow{a_p}(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{a_g}(b_1, b_2, b_3)$ и $\overrightarrow{MN}\ (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

а) Ако

$$(\overrightarrow{a}_p, \overrightarrow{a}_g, \overrightarrow{MN}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то правите са кръстосани.

б) Ако

$$(\overrightarrow{a}_p, \overrightarrow{a}_g, \overrightarrow{MN}) = 0,$$

то правите лежат в една равнина.

- Ако векторите $\overrightarrow{a_p}$ и $\overrightarrow{a_g}$ не са успоредни, то правите се пресичат.

- Ако векторите $\overrightarrow{a_p}$ и $\overrightarrow{a_g}$ са успоредни, но векторът $\overrightarrow{MN}$ не е успореден на тях, то правите са успоредни.

- Ако векторите $\overrightarrow{a_p}$, $\overrightarrow{a_g}$ и $\overrightarrow{MN}$ са успоредни, то правите се сливат.

<u>*Пример 7.10*</u>: Да се намери пробода A на правата

$$g: \begin{cases} x = \ 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = \ 2 - 2t \end{cases}$$

с равнината $\alpha: \ x + 2y - z - 12 = 0$.

Решение: Координатите на прободната точка са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} x = \ 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = \ 2 - 2t \\ x + 2y - z - 12 = 0 \end{array} \right.$$

Заместваме $x = 2 + 3t$, $y = -1 + t$, $z = 2 - 2t$ в уравнението на равнината и получаваме

$$2 + 3t + 2(-1 + t) - (2 - 2t) - 12 = 0$$

$$7t - 14 = 0 \qquad \text{или} \qquad t = 2.$$

Заместваме $t = 2$ в уравненията на правата и получаваме координатите на пробода $A(8, 1, -2)$.

<u>*Пример 7.11*</u>: Да се намери пробода A на правата

$$g: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

с равнината $\alpha: \ x + y - 2z + 15 = 0$.

Решение: От каноничните уравнения на правата g получаваме скаларно-параметричните уравнения

$$g: \begin{cases} x = \ \ 1 + 2t \\ y = \ \ 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

След това решаваме както Пример 7.10 (направете това сами) и получаваме $A(9, -2, 11)$.

<u>*Пример 7.12*</u>: Да се определи взаимното положение на правите p и g:

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$$

$$g: \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

Решение: Точката $M(1, 7, 3)$ е точка от правата p и направляващ вектор на същата права е векторът $\overrightarrow{a_p}(2, 1, 4)$. Аналогично, точката $N(6, -1, -2)$ е точка от правата g и направляващ вектор на тази права е векторът $\overrightarrow{a_g}(3, -2, 1)$. Векторът

$\overrightarrow{MN}$ има координати $\overrightarrow{MN}(5,-8,-5)$.

Пресмятаме смесеното произведение на тези три вектора

$$(\overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{a_g}, \overrightarrow{MN}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Следователно двете прави лежат в една равнина. Тъй като направляващите им вектори не са колинеарни, то двете прави се пресичат.

ЗАДАЧИ

7.1. Да се напише уравнението на равнина α, минаваща по правата

$$g: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

и перпендикулярна на равнината $\beta: \ 2x + y - 3z + 2 = 0$.

Решение: Точката $M(-1,1,0)$ е точка от правата g и направляващ вектор на същата права е векторът $\overrightarrow{a_g}(2,-1,1)$. Нормалният вектор на равнината β е успореден на равнината α. Следователно равнината α е определена от точката M и двата вектора $\overrightarrow{a}_g$ и $\overrightarrow{N}_\beta$. Прилагаме формула (7.4)

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: \quad x + 4y + 2z - 3 = 0.$$

7.2. Да се напише уравнението на равнина α, която минава през точката $M(2,-1,5)$ и е перпендикулярна на равнините $\beta: \ 3x-2y+z-1=0$ и $\gamma: \ 5x-4y+3z-5=0$.

Решение: От това, че равнината α е перпендикулярна на двете равнини, следва че нормалните им вектори са компланарни с тази равнина. Следователно равнината α е определена от точката M и двата нормални вектора. Прилагаме формула (7.4) и получаваме

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: \quad x + 2y + z - 5 = 0.$$

7.3. Да се напише уравнението на симетралната равнина на отсечката AB, където $A(2,-2,5)$, $B(4,-6,-3)$.

Решение: Симетрална равнина на дадена отсечка е равнината, която минава през средата на отсечката и е перпендикулярна на нея.

Средата O на отсечката AB има координати

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_O = \frac{z_A + z_B}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad x_O = 3, \quad y_O = -4, \quad z_O = 1.$$

Търсената равнина минава през точката $O(3, -4, 1)$ и е перпендикулярна на $\overrightarrow{AB}(2, -4, -8)$. Следователно тя има уравнение

$$2(x-3) - 4(y+4) - 8(z-1) = 0 \text{ или } x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

7.4. Да се напишат каноничните уравнения на пресечницата g на равнините α и β.

$$g : \begin{cases} \alpha : x - 3y - z - 20 &= 0 \\ \beta : 2x + y - z + 1 &= 0 \end{cases}$$

Решение: Направляващият вектор на пресечницата е колинеарен на векторното произведение на нормалните вектори $\overrightarrow{N_\alpha}(1, -3, -1)$ и $\overrightarrow{N_\beta}(2, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{N_\alpha} \times \overrightarrow{N_\beta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}.$$

Точка от правата получаваме като намерим едно решение на системата

$$\left| \begin{array}{ll} x - 3y - z - 20 & = 0 \\ 2x + y - z + 1 & = 0 \end{array} \right.$$

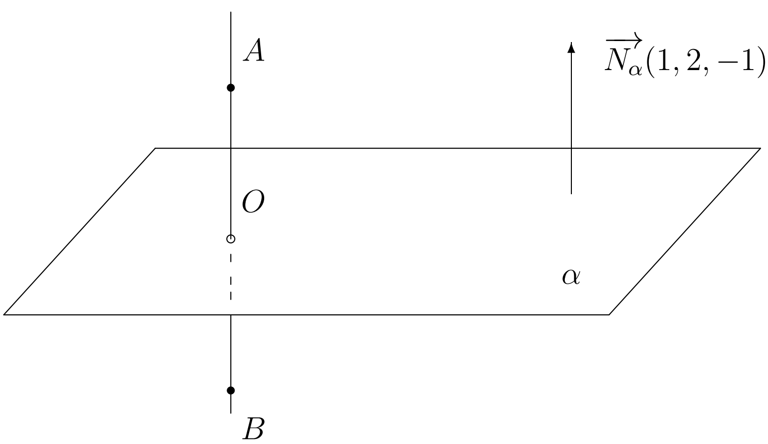
Ако положим например $z = 1$, получаваме $x = 3$, $y = -6$.

Следователно каноничните уравнения са:

$$g : \quad \frac{x-3}{4} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-1}{7}.$$

7.5. Да се намерят координатите на точка B, ортогонално-симетрична на точката $A(1, 1, -2)$ спрямо равнината $\alpha : x + 2y - z - 17 = 0$.

Решение : През точката A прекарваме права, перпендикулярна на равнината α. След това намираме пробода O на тази права с равнината. Прободът е среда на отсечката AB и лесно намираме координатите на точката B, като знаем средата и другия край.



Уравнението на правата, минаваща през точката $A(1,1,-2)$ и перпендикулярна на $x+2y-z-17=0$ е

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}.$$

Пресечната точка на правата и равнината е решението на системата

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}\\ x+2y-z-17=0\end{array}\right.$$

Заместваме $x=1+t,\ y=1+2t,\ z=-2-t$ в уравнението на равнината $x+2y-z-17=0$ и получаваме $t=2$. Следователно координатите на пробода O са

$$x=3,\quad y=5,\quad z=-4.$$

Точката $O(3,5,-4)$ е среда на отсечката, свързваща точката A и нейната симетрична B. Тогава

$$x_O=\frac{x_A+x_B}{2},\qquad y_O=\frac{y_A+y_B}{2},\qquad z_O=\frac{z_A+z_B}{2}$$

или

$$3=\frac{1+x_B}{2},\qquad 5=\frac{1+y_B}{2},\qquad -4=\frac{-2+z_B}{2}.$$

Следователно

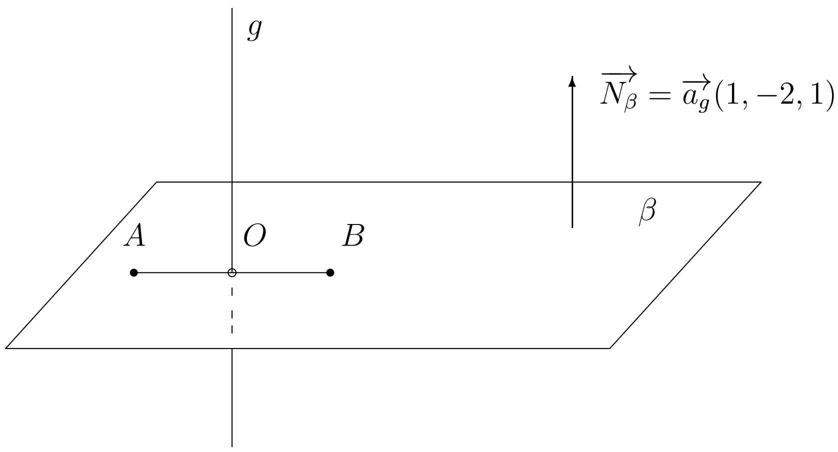
$$x_B=5,\quad y_B=9,\quad z_B=-6.$$

Симетричната точка е $B(5,9,-6)$.

7.6. Да се намерят координатите на точка B, симетрична на точката $A(2,1,4)$ спрямо правата

$$g:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}.$$

Решение : През точката A прекарваме равнина β, перпендикулярна на дадената права. Намираме пробода O на тази права с равнината. Тъй като прободът е среда на отсечката AB, то лесно намираме координатите на точката B.



Уравнението на равнината, минаваща през точката $A(2,1,4)$ и перпендикулярна на правата g, е

$$\beta: \ (x-2)-2(y-1)+z-4=0$$

или

$$\beta: \quad x-2y+z-4=0.$$

Координатите на пресечната точка O на правата и равнината получаваме от системата

$$\left| \begin{array}{l} x=2+t \\ y=3-2t \\ z=2+t \\ x-2y+z-4=0 \end{array} \right.$$

Заместваме $x=2+t$, $y=3-2t$, $z=2+t$ в уравнението $x-2y+z-4=0$ и получаваме $t=1$. Следователно координатите на O са

$$x=3, \quad y=1, \quad z=3.$$

Точката $O(3,1,3)$ е среда на отсечката, свързваща точката A и нейната симетрична точка B и това означава, че нейните координати се получават като средноаритметично от съответните координати на крайните точки, т.е.

$$x_O=\frac{x_A+x_B}{2}, \qquad y_O=\frac{y_A+y_B}{2}, \qquad z_O=\frac{z_A+z_B}{2},$$

или

$$3=\frac{2+x_B}{2}, \qquad 1=\frac{1+y_B}{2}, \qquad 3=\frac{4+z_B}{2}.$$

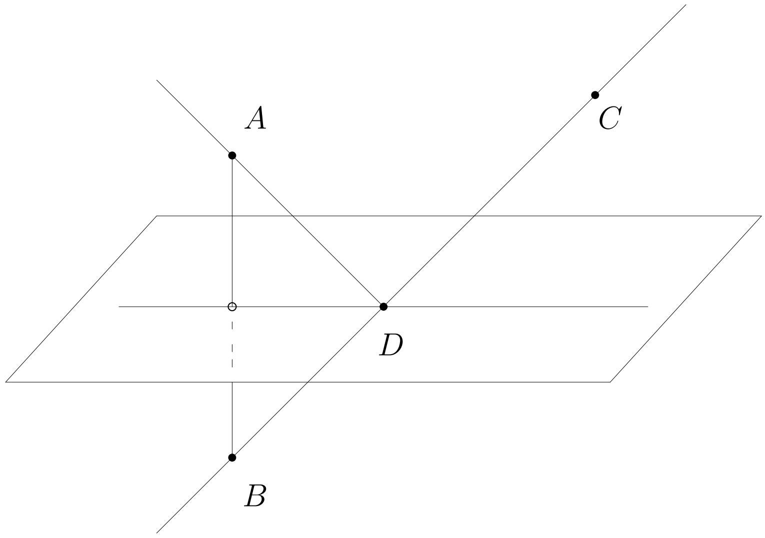
Следователно

$$x_B=4, \quad y_B=1, \quad z_B=2,$$

т.е. симетричната точка е $B(4,1,2)$.

7.7. Светлинен лъч минава през точката $A(1,1,-2)$ и след отразяването си от равнината $\alpha: \ x+2y-z-17=0$ минава през точката $C(-1,15,18)$. Напишете уравненията на падащия и отразения лъч.

Решение : От физиката знаем, че ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение. Следователно симетричната точка B на точката A спрямо равнината α, лежи на продължението на отразения лъч и тя има координати $x_B=5$, $y_B=9$, $z_B=-6$ (виж зад. 7.5).



Отразеният лъч минава през точките C и B и следователно има уравнения: $x = 5 + t,\ y = 9 - t,\ z = -6 - 4t$. Прободът на отразения лъч и равнината α е точката на отражение

$$D(1, 13, 10).$$

Векторът $\overrightarrow{AD}$ има координати $\overrightarrow{AD}(0, 12, 12)$. Следователно падащият лъч, определен от точките D и A, има уравнения

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

Всяка права, която пресича две кръстосани прави, се нарича **трансверзала. Ос** на две кръстосани прави се нарича трансверзалата, която е перпендикулярна на двете прави.

7.8. Напишете уравнението на оста c на кръстосаните прави

$$a: \ \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

$$b: \ \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Решение : Задачата може да се реши по няколко начина. Ще изложим два от тях.

Направляващият вектор на търсената права c е перпендикулярен на векторите $\overrightarrow{a}(1, 2, -1)$ и $\overrightarrow{b}(-7, 2, 3)$. Следователно той е колинеарен на вектора

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 16\overrightarrow{k}.$$

За направляващ вектор избираме $\overrightarrow{c}(2, 1, 4) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$.

Първи начин: Намираме уравнението на равнина α, минаваща по правата b и успоредна на вектор $\overrightarrow{c}$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ -7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: \quad 5x + 34y - 11z - 38 = 0.$$

Намираме пробода M на правата $a : \{x = t+7,\ y = 2t+3,\ z = -t+9\}$ с равнината $\alpha : 5x + 34y - 11z - 38 = 0$.

$$\Longrightarrow \quad 5(t+7) + 34(2t+3) - 11(-t+9) - 38 = 0.$$

Получаваме $t = 0$ и следователно

$$M(7, 3, 9).$$

Оста има уравнения:

$$c: \ \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}$$

Втори начин: След като намерим уравнението на равнината α, намираме уравнението на равнина β, минаваща по правата a и успоредна на вектор $\overrightarrow{c}$

$$\beta: \ \begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-9 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\beta: \quad 3x - 2y - z - 6 = 0.$$

Пресечницата на равнините α и β е търсената права. Следователно

$$\overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{N_\alpha} \times \overrightarrow{N_\beta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & 34 & -11 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -56\overrightarrow{i} - 28\overrightarrow{j} - 112\overrightarrow{k} = -28(2\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k})$$

Точка от правата получаваме като решим системата

$$\left| \begin{array}{l} 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \\ 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Получаваме $N(1, 0, -3) \in c$. Следователно оста има уравнения

$$c: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$$

Задачи за самостоятелна работа:

7.9. Да се напише уравнението на равнината α, която минава през точката $A(2,-3,1)$ и е перпендикулярна на вектора $\overrightarrow{N_\alpha}(2,1,-2)$.

Отг. $\alpha: \quad 2x+y-2z+1=0$

7.10. Да се напише уравнението на равнината α, която минава през точката $M(3,-1,-2)$ и е успоредна на равнината $\beta: \ x-3y+2z-5=0$.

Отг. $\alpha: \quad x-3y+2z-2=0$

7.11. Да се напише уравнението на равнината α, която минава през точката $A(2,-3,2)$ и е успоредна на векторите $\overrightarrow{a}(1,-1,4)$ и $\overrightarrow{b}(2,1,-1)$.

Отг. $\alpha: \quad x-3y-z-9=0$

7.12. Да се напише уравнението на равнината α, определена от точките $A(1,3,2)$, $B(10,8,3)$ и $C(6,6,-1)$

Отг. $\alpha: \quad 9x-16y-z+41=0$

7.13. Да се напише уравнението на равнината α, определена от точката $A(2,1,3)$ и правата $p: \ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{-1}$.

Отг. $\alpha: \quad 3x-y-5=0$

7.14. Да се напише уравнението на равнината α, определена от успоредните прави

$$p: \ \frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{3}$$

и

$$q: \ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}.$$

Отг. $\alpha: \ 7x-17y+z-6=0$

7.15. Да се напише уравнението на равнината α, определена от пресичащите се прави

$$p: \ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$$

и

$$q: \ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{3}.$$

Отг. $\alpha:\ 3x-7y-z-5=0$

7.16. Да се напише уравнението на равнината α, минаваща по правата

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}$$

и перпендикулярна на равнината $\beta:\ 3x+y-z+2=0$.

Отг. $\alpha:\ x-6y-3z-11=0$

7.17. Да се напише уравнението на равнината α, която минава през точката $M(-1,3,2)$ и е перпендикулярна на равнините $\beta:\ x-3y+z-1=0$ и $\gamma:\ 2x+y+z-5=0$.

Отг. $\alpha:\ 4x-y-7z+21=0$

7.18. Да се напише уравнението на симетралната равнина на отсечката $AB:\ A(1,-2,3),\quad B(5,-4,-1)$.

Отг. $\alpha:\ 2x-y-2z-7=0$

7.19. Да се напише уравнението на равнината α, минаваща през пресечницата на равнините $\beta: 2x-y+3z-5=0$ и $\gamma: x+2y-z+2=0$, успоредна на вектора $\overrightarrow{a}(2,-1,-2)$.

Упътване: Равнината е определена от точка от пресечницата, направляващия вектор на пресечницата $\overrightarrow{N_\beta}\times\overrightarrow{N_\gamma}$ и вектора $\overrightarrow{a}$.

Отг. $\alpha:\ 5x+5z-8=0$

7.20. Да се напише уравнението на равнината α, която минава през пресечницата на равнините $\beta: 2x+y+4z-3=0$ и $\gamma: x+y+3z-1=0$ и е перпендикулярна на равнината $\delta: x-2y-z+3=0$.

Отг. $\alpha:\ x+z-2=0$

7.21. Да се напишат каноничните уравнения на правата

$$g:\ \begin{cases} \alpha: 2x+3y+2z+8 &= 0\\ \beta: x-y-z-1 &= 0\end{cases}$$

Отг. $g:\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z}{5}$

7.22. Да се определи взаимното положение на правите p и g:

а)

$$p: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+7}{2}$$
$$g: \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+9}{2}$$

б)

$$p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+3}{1}$$
$$g: \frac{x+17}{3} = \frac{y+11}{6} = \frac{z}{3}$$

в)

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$$
$$g: \frac{x-3}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-4}{-3}$$

Отг. а)пресичат се б)успоредни
в)кръстосани

7.23. Да се намерят координатите на точка, ортогонално симетрична на точката $A(1,3,-4)$ спрямо равнината $\alpha: \ 3x+y-2z=0$.

Отг. $(-5,1,0)$

7.24. Да се намери разстоянието от точката $A(7,9,7)$ до правата $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

Отг. $\sqrt{22}$

7.25. Да се намерят координатите на точка, симетрична на точката $A(4,3,10)$ спрямо правата

$$g: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

Отг. $(2,9,6)$

7.26. През пробода на правата $g: \begin{cases} x &= 1 \\ z+1 &= 0 \end{cases}$ с равнината $\alpha: \ x+y+z=1$ да се прекара права p, лежаща в α и перпендикулярна на g.

Упътване: Припомнете си теоремата за трите перпендикуляра. Правата p минава през прободната точка и има направляващ вектор $\overrightarrow{a_p} = \overrightarrow{N_\alpha} \times \overrightarrow{a_g}$.

Отг. $p: \quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+1}{-1}$

7.27. Да се напише уравнението на права, минаваща през точката $A(1,0,7)$, успоредна на равнината $3x - y + z - 15 = 0$ и пресичаща правата $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{3}$.

Упътване: Прекарайте през точката A равнина, успоредна на дадената.

Отг. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-7}{-1}$

7.28. Точките $A(1,-2,3)$ и $C(5,-4,-1)$ са противоположни върхове на ромб. Върхът B лежи на правата $g: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z-2}{-3}$. Да се напише уравнението на равнината на ромба и да се намери лицето му.

Упътване : Напишете уравнението на симетралната равнина на отсечката AC. Лицето на ромба ще намерите като големина на векторното произведение на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. (виж Глава 6).

Отг. $5x + 2y + 4z - 13 = 0,\ B(3,1,-1)$
$S = 12\sqrt{6}$

7.29. Светлинен лъч минава през точката $A(7,1,1)$ и след отразяването си от равнината $\alpha: x+y+z=0$ минава през точката $B(2,4,5)$. Напишете уравненията на падащия и отразения лъч.

Отг. $\dfrac{x-7}{37} = \dfrac{y-1}{13} = \dfrac{z-1}{10}$
$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{9} = \dfrac{z-5}{10}$

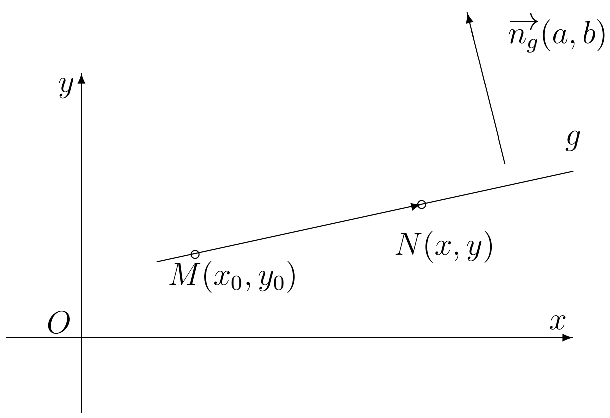
Глава 8

Права в равнината

В тази глава са представени различните видове уравнения на права в равнината. След усвояване на материала вие ще умеете да решавате редица геометрични задачи, прилагайки методите на аналитичната геометрия.

1. Уравнение на права, определена от точка и нормален вектор

Нека точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи на g, а векторът $\overrightarrow{n}_g(a, b)$ е перпендикулярен на g.



Нека $N(x, y)$ е произволна точка от g. Тогава

$$N(x,y) \in g \Leftrightarrow \overrightarrow{n_g}(a,b) \perp \overrightarrow{MN}(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_g}.\overrightarrow{MN} = a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

Следователно уравнението на правата g е

$$g: \quad a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \tag{8.1}$$

2. Общо уравнение на права

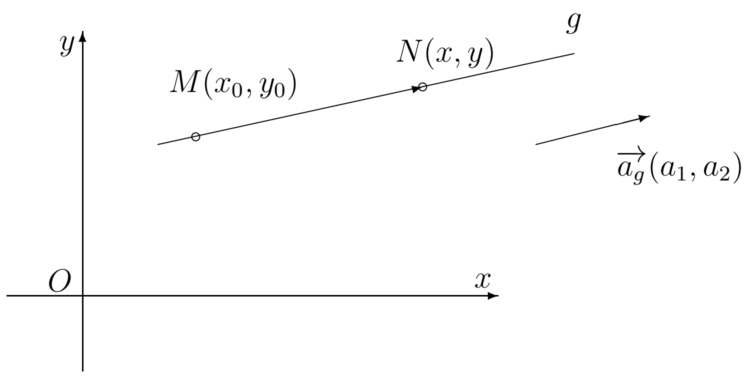
Разкриваме скобите в (8.1) и полагаме $c = -(ax_0 + by_0)$. Получаваме

$$g: ax+by+c=0, \tag{8.2}$$

където a и b не са едновременно нули. Ако $a^2 + b^2 = 1$ уравнението (8.2) се нарича **нормално** уравнение на правата.

Теорема 8.1 *Всяка права в равнината има уравнение от вида (8.2) и всяко уравнение от вида (8.2), при допълнителното условие* $a^2 + b^2 \neq 0$, *е уравнение на права в равнината.*

3. Уравнения на права, определена от точка и направляващ вектор

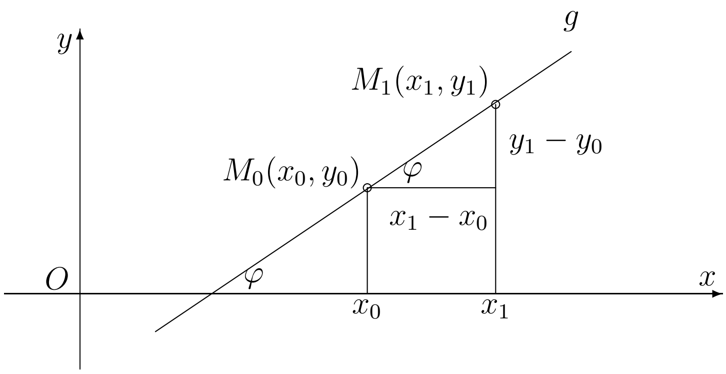


Нека $N(x,y)$ е произволна точка от g. Тогава векторите $\overrightarrow{MN}\ (x-x_0, y-y_0)$ и $\overrightarrow{a}_g(a_1,a_2)$ са колинеарни. Това означава, че $\overrightarrow{MN} = t.\overrightarrow{a}_g$, където $-\infty < t < +\infty$ е параметър. Следователно

$$g: \quad \begin{cases} x = & x_0 & + & a_1.t \\ y = & y_0 & + & a_2.t \end{cases} \tag{8.3}$$

Уравненията (8.3) се наричат скаларно-параметрични уравнения на правата g.

4. Уравнения на права през две точки



От (8.3) следва, че правата g, която минава през точките $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$, т.е. $\overrightarrow{a}_g = \overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0)$, има следните уравнения:
а) скаларно-параметрични уравнения

$$g: \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \tag{8.4}$$

б) канонично уравнение

$$g: \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \tag{8.5}$$

Ако правата g минава през точката $M_0(x_0,y_0)$ и е успоредна на оста Ox или оста Oy, от (8) следва, че тя има съответно уравнения $y = y_0$ и $x = x_0$.

5. Уравнение на права по точка и ъглов коефициент

Нека правата g не е успоредна на ординатната ос, минава през точката $M_0(x_0, y_0)$ и сключва с положителната посока на абсцисната ос ориентиран ъгъл φ. Тогава уравнението (8.5) можем да преобразуваме във вида

$$g : y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Но

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg}\varphi$$

Означаваме $k = \operatorname{tg}\varphi$ - **ъглов коефициент** на правата. Така получаваме

$$g : \; y - y_0 = k(x - x_0) \tag{8.6}$$

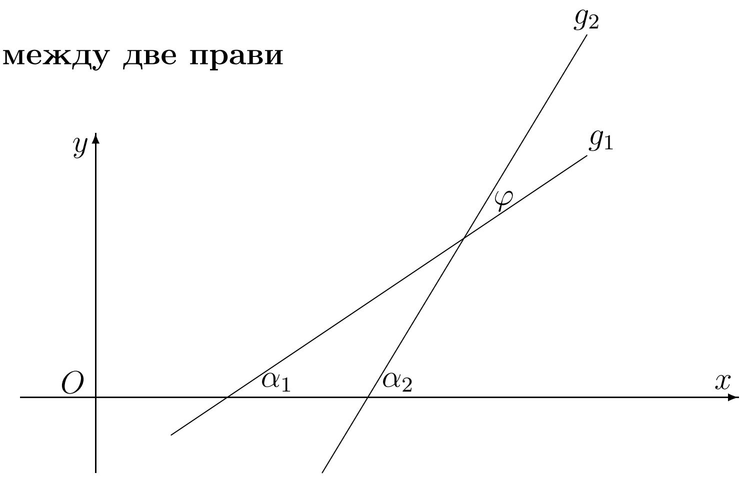
6. Уравнение на права с ъглов коефициент

След разкриване на скобите в (8.6) и полагането $n = y_0 - kx_0$ получаваме

$$g : \; y = kx + n, \tag{8.7}$$

което се нарича **декартово уравнение.** Числото n е отреза, който правата отсича от ординатната ос.

7. Ъгъл между две прави



Нека правите $g_1 : y = k_1x + n_1$ и $g_2 : y = k_2x + n_2$ се пресичат и нека означим с φ ъгъла, на който трябва да бъде завъртяна правата g_1 в положителна посока, докато се слее с правата g_2.
Тогава

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

и като използваме формулата

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

получаваме

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \tag{8.8}$$

8. Условия за успоредност и за перпендикулярност на две прави

Очевидно е, че две прави $g_1 : y = k_1x + n_1$ и $g_2 : y = k_2x + n_2$ са успоредни тогава и само тогава, когато имат равни ъглови коефициенти, т.е.

$$g_1 || g_2 \Longleftrightarrow k_1 = k_2 \tag{8.9}$$

Ако двете прави са перпендикулярни, тогава са перпендикулярни и нормалните им вектори $n_{g_1}(k_1, -1)$ и $n_{g_2}(k_2, -1)$. Следователно

$$g_1 \perp g_2 \Longleftrightarrow n_{g_1} \perp n_{g_2} \Longleftrightarrow n_{g_1}.n_{g_2} = 0 \Longleftrightarrow k_1.k_2 = -1 \tag{8.10}$$

9. Разстояние от точка до права

За разстоянието d от точката $M_0(x_0, y_0)$ до правата $g : ax + by + c = 0$ е в сила следната формула

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{8.11}$$

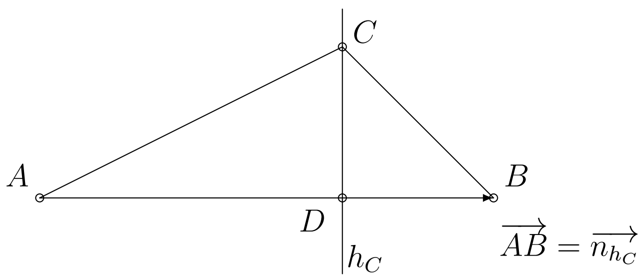
Извеждането на формулата е напълно аналогично на това за разстояние от точка до равнина. *Направете го сами.*

Всяка права разделя равнината на две полуравнини. Ако $ax_0 + by_0 + c > 0$, точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи в онази полуравнина, определена от правата g, към която сочи нормалният вектор $\overrightarrow{n}(a, b)$. Ако пък $ax_0 + by_0 + c < 0$, точката $M_0(x_0, y_0)$ се намира в другата полуравнина.

ЗАДАЧИ

8.1 Точките $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ и $C(3, -2)$ са върхове на $\triangle ABC$. Напишете уравнението на височината h_C през върха C и намерете нейната дължината.

Решение:



Намираме уравнението на AB. Имаме $\overrightarrow{AB}(3, 4)$ и

$$AB : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}, \qquad \text{т.е. } AB : 4x - 3y - 1 = 0.$$

Векторът $\overrightarrow{AB}(3, 4)$ е нормален за h_C и уравнението на височината е

$$h_C : 3(x-3) + 4(y+2) = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad h_C : 3x + 4y - 1 = 0.$$

За да намерим дължината на височината не е необходимо да намираме пресечната и точка D с правата AB, а използваме формула (8.10) за разстоянието от точката C до AB

$$|CD| = \frac{|4.3 - 3.(-2) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{17}{5}$$

8.2 Намерете ортоцентъра и медицентъра на $\triangle ABC$ с върхове $A(-4, 2)$, $B(2, -5)$, и $C(5, 0)$.

Решение: Намираме уравненията на височините h_A и h_B през върховете A и B. Имаме $\overrightarrow{n}_{h_A} = \overrightarrow{BC} = (3, 5)$, следователно

$$h_A : 3(x + 4) + 5(y - 2) = 0, \quad h_A : 3x + 5y + 2 = 0.$$

Аналогично $\overrightarrow{n}_{h_B} = \overrightarrow{AC} = (9, -2)$ и

$$h_B : 9x - 2y - 28 = 0.$$

Ортоцентърът H е пресечната точка на h_A и h_B.

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 5y + 2 = 0 \\ 9x - 2y - 28 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{8}{3} \\ y = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow H\left(\frac{8}{3}, -2\right).$$

Координатите на медицентъра $G(x_G, y_G)$ пресмятаме по формулите

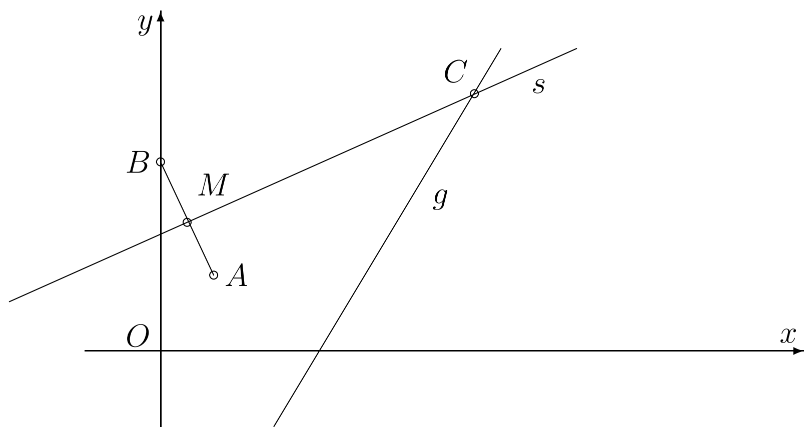
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Следователно

$$x_G = \frac{-4 + 2 + 5}{3} = 1, \qquad y_G = \frac{2 - 5 + 0}{3} = -1.$$

8.3 Точките $A(2, 4)$ и $B(0, 6)$ са върхове на равнобедрен триъгълник $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. Намерете третия връх C, ако той лежи на правата $g : 2x - y - 6 = 0$.

Решение:



Третият връх C е пресечна точка на симетралата s на отсечката AB и правата g. Нека M е среда на AB. Тогава $M(1,5)$. Векторът $\overrightarrow{AB}(-2,2)$ е нормален за s. Следователно

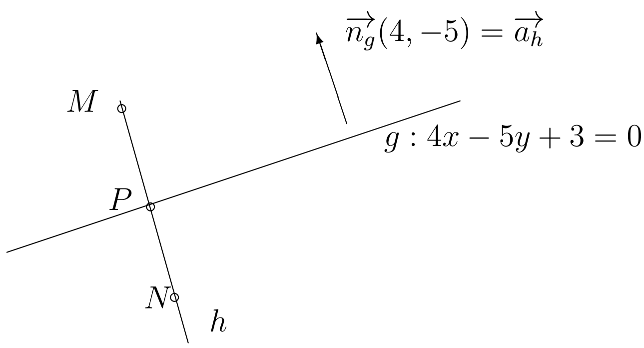
$$s : -2(x-1) + 2(y-5) = 0$$

$$s : x - y + 4 = 0$$

Решаваме системата от уравненията на s и g и получаваме $C(10,14)$.

8.4 Да се намери точка N, ортогонално симетрична на точката $M(-6,4)$ относно правата $g : 4x - 5y + 3 = 0$.

Решение:



През точката M построяваме права h, перпендикулярна на g. Нормалният вектор $\overrightarrow{n_g}(4,-5)$ на g служи за направляващ на h. Следователно $\overrightarrow{a_h}(4,-5)$, а $\overrightarrow{n_h}(5,4)$. Тогава $h : 5(x+6)+4(y-4) = 0$, т.е. $h : 5x+4y+14 = 0$. Точката P е ортогонална проекция на точката M върху правата g и е пресечна точка на правите g и h

$$\left| \begin{array}{l} 4x - 5y + 3 = 0 \\ 5x + 4y + 14 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P(-2,-1).$$

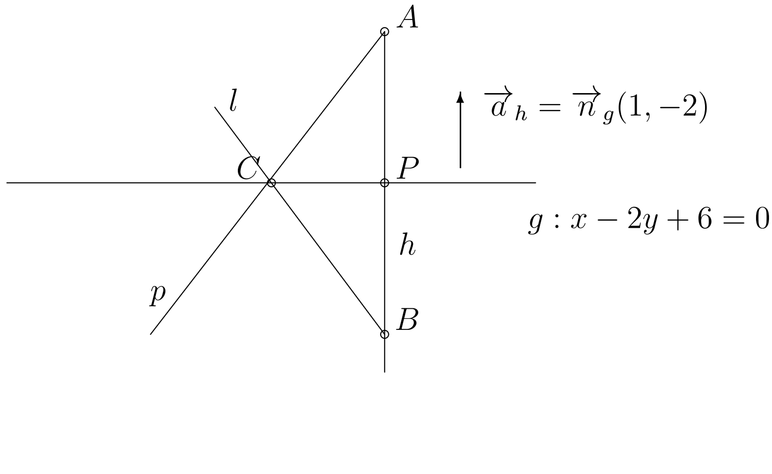
Тъй като P е среда на отсечката MN, то

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2}, \qquad y_P = \frac{y_A + y_B}{2},$$
$$-4 = -6 + x_N, \qquad -2 = 4 + y_N$$

и следователно $\quad x_N = 2, \;\; y_N = -6.$

8.5 През точката $A(8,12)$ минава светлинен лъч, който се отразява от правата $g : x - 2y + 6 = 0$ в точката $C(4,5)$. Да се намерят уравненията на падащия и отразения лъч.

Решение:



Падащият лъч p е определен от двете точки $A(8,12)$ и $C(4,5)$. Направляващ вектор за p е векторът $\overrightarrow{CA}(4,7)$. Следователно

$$p : \frac{x-8}{4} = \frac{y-12}{7}, \implies p : 7x - 4y - 8 = 0$$

Отразеният лъч ще минава през точка B – ортогонално-симетрична на A спрямо g. Построяваме права h, минаваща през A и перпендикулярна на g. Имаме $\overrightarrow{a_h} = \overrightarrow{n_g}(1,-2)$. Следователно $h : 2x + y - 28 = 0$. Намираме координатите на пресечната точка P на h и g от системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y - 28 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{array} \right.$$

Получаваме $P(10,8)$. Тъй като P е среда на отсечката AB, то:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2},$$

$$x_B = 2x_P - x_A, \quad y_B = 2y_P - y_A,$$

откъдето $B(12,4)$. Уравнението на отразения лъч l написваме по точките $B(12,4)$ и $C(4,5)$

$$l : x + 8y - 44 = 0$$

8.6 Да се намери уравнението на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$, ако са дадени уравненията на страните му $AB : x + 7y - 7 = 0$, $BC : 9x - 17y + 17 = 0$, $AC : x - y - 7 = 0$.

Решение: Пресичайки две по две дадените три прави, за върховете на $\triangle ABC$ получаваме

$$A(7,0), \quad B(0,1), \quad C(17,10).$$

Тогава

$$\overrightarrow{AB}(-7,1), \quad \implies \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

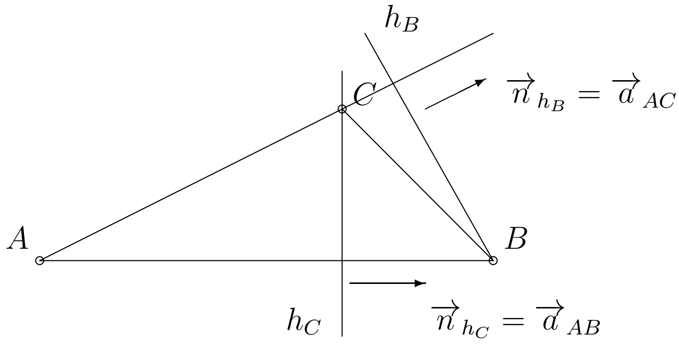
$$\overrightarrow{AC}(10,10), \quad \implies \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 2\sqrt{50}$$

и лесно забелязваме, че векторите $\overrightarrow{AB}(-7,1)$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ имат равни дължини. Следователно тяхната сума ще бъде направляващ вектор за търсената ъглополовяща $\overrightarrow{a_l}(-2,6)$, т.е.

$$l : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-0}{3}, \qquad \text{т.е. } l : 3x + y - 21 = 0.$$

8.7 Дадени са координатите на върха $A(-2,-4)$ и уравненията на височините $h_B : x - y - 5 = 0$ и $h_C : 2x - y + 3 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

Решение:



Нормалният вектор на h_C служи за направляващ вектор на правата AB. Следователно

$$AB : \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{-1}, \quad \Longrightarrow \quad AB : x + 2y + 10 = 0$$

Пресечната точка на AB и h_B е точката B.

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y + 10 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -5 \end{array} \right. \Longrightarrow B(0, -5)$$

Нормалният вектор на h_B служи за направляващ вектор на правата AC. Следователно

$$AC : \frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{-1}, \quad \Longrightarrow \quad AC : x + y + 6 = 0$$

Пресечната точка на AC и h_C е точката C.

$$\left| \begin{array}{l} x + y + 6 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow C(-3, -3)$$

8.8 Дадени са уравненията на страната $AB : x + 4y - 13 = 0$ и на височините $h_A : x + 3 = 0$ и $h_B : 3x - y = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение: Пресечните точки на двете височини с правата AB са върховете A и B на $\triangle ABC$:

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 4y - 13 = 0 \\ h_A : x + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow A(-3, 4)$$

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 4y - 13 = 0 \\ h_B : 3x - y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow B(1, 3)$$

Нормалният вектор на h_B служи за направляващ вектор на правата AC. Следователно

$$AC : \frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-1}, \quad \Longrightarrow \quad AC : x + 3y - 9 = 0.$$

Нормалният вектор на h_A служи за направляващ вектор на правата BC. Следователно

$$BC : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0}, \quad \Longrightarrow \quad BC : y - 3 = 0.$$

$$\left| \begin{array}{l} AC : x + 3y - 9 = 0 \\ BC : y - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow C(0, 3)$$

8.9 Дадени са уравненията на страните $AB : x + 3y + 8 = 0$ и $BC : x + 2y + 6 = 0$ на $\triangle ABC$ и ортоцентърът му $H(-2, -9)$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение:

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 3y + 8 = 0 \\ BC : x + 2y + 6 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow B(-2,-2)$$

Нормалният вектор на AB служи за направляващ вектор на височината h_C. Следователно

$$h_C : \frac{x+2}{1} = \frac{y+9}{3}, \quad \Longrightarrow \quad h_C : 3x - y - 3 = 0$$

Върхът C е пресечна точка на h_C и BC .

$$\left| \begin{array}{l} BC : x + 2y + 6 = 0 \\ h_C : 3x - y - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow C(0,-3)$$

Нормалният вектор на BC служи за направляващ вектор на височината h_A. Следователно

$$h_A : \frac{x+2}{1} = \frac{y+9}{2}, \quad \Longrightarrow \quad h_A : 2x - y - 5 = 0$$

Върхът A е пресечна точка на h_A и AB .

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 3y + 8 = 0 \\ h_A : 2x - y - 5 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow A(1,-3).$$

8.10 Дадени са уравненията на страните $AB : x - 4y + 34 = 0$, $AC : 2x + y - 4 = 0$ и на медианата $m_B : x + y + 4 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете уравнението на третата страна на триъгълника.

Решение: Върхът A е пресечна точка на правите AB и AC.

$$\left| \begin{array}{l} AB : x - 4y + 34 = 0 \\ AC : 2x + y - 4 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 8 \end{array} \right. \Longrightarrow A(-2,8)$$

Върхът B е пресечна точка на правата AB и медианата m_B.

$$\left| \begin{array}{l} AB : x - 4y + 34 = 0 \\ m_B : x + y + 4 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -10 \\ y = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow B(-10,6)$$

Да означим с $M(x_M, y_M)$ средата на страната AC. Изразяваме условията, че точката M лежи на AC и m_b и получаваме следната система:

$$\left| \begin{array}{l} M \in AC : 2x_M + y_M - 4 = 0 \\ m \in m_B : x_M + y_M + 4 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x_M = 8 \\ y_M = -12 \end{array} \right. \Longrightarrow M(8,-12)$$

Тъй като $M(8,-12)$ е среда на отсечката AC, то лесно намираме върха C:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_M, \qquad \frac{y_A + y_C}{2} = y_M$$

$$\frac{-2 + x_C}{2} = 8, \qquad \frac{8 + y_C}{2} = -12$$

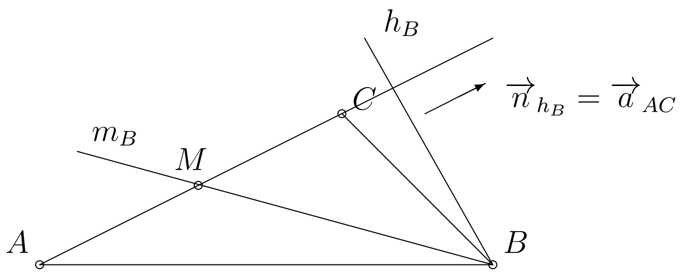
$$\left| \begin{array}{l} x_C = 18 \\ y_C = -32 \end{array} \right. \Longrightarrow C(18, -32)$$

По двете точки $B(-10, 6)$ и $C(18, -32)$ написваме уравнението на правата BC.

$$BC : \frac{x+10}{28} = \frac{y-6}{-38}, \qquad BC : 19x + 14y + 106 = 0.$$

8.11 Дадени са координатите на върха $A(-2, 9)$ и уравненията на височината $h_B : 6x + 13y + 29 = 0$ и медианата $m_B : 3x + 10y - 10 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

Решение:



Точка B намираме като пресечна точка на дадените височина и медиана:

$$\left| \begin{array}{l} h_B : 6x + 13y + 29 = 0 \\ m_B : 3x + 10y - 10 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -20 \\ y = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow B(-20, 7)$$

Нормалният вектор на височината h_B служи за направляващ вектор на правата AC. Следователно

$$AC : \frac{x+2}{6} = \frac{y-9}{13}$$
$$AC : 13x - 6y + 80 = 0$$

Да означим средата на AC с M.

$$\left| \begin{array}{l} AC : 13x - 6y + 80 = 0 \\ m_B : 3x + 10y - 10 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -5 \\ y = 2,5 \end{array} \right. \Longrightarrow M(-5; 2,5)$$

Знаейки средата $M(-5; 2,5)$ и единият край $A(-2, 9)$ на отсечката AC, лесно намираме точката C:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_M, \qquad \frac{y_A + y_C}{2} = y_M$$

$$\frac{-2 + x_C}{2} = -5, \qquad \frac{9 + y_C}{2} = 2,5$$

$$\left| \begin{array}{l} x_C = -8 \\ y_C = -4 \end{array} \right. \Longrightarrow C(-8, -4)$$

8.12 Дадени са координатите на медицентъра $G(-3, 10)$ и уравненията на страните $AB : x + 4 = 0$ и $BC : 14x + 3y - 4 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение: Намираме:
1) Пресечната точка $B(-4, 20)$ на AB и BC
2) Координатите на вектора $\overrightarrow{BG}(1, -10)$
3) Нека M е средата на AC. Тогава $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} = (\frac{3}{2}, -15)$
4) Сега имаме $x_M - x_B = \frac{3}{2}$, $y_M - y_B = -15$. Следователно $M(-\frac{5}{2}, 5)$
5) Нека $A(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$. Изразяваме условието, че M е среда на AC и получаваме $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{5}{2}$ и $\frac{y_1 + y_2}{2} = 5$.
6) Тъй като A лежи на AB и C лежи на BC е изпълнено

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 4 = 0 \\ 14x_2 + 3y_2 - 4 = 0 \end{array}\right.$$

7) Решаваме системата от четирите уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -5 \\ y_1 + y_2 = 10 \\ x_1 + 4 = 0 \\ 14x_2 + 3y_2 - 4 = 0 \end{array}\right.$$

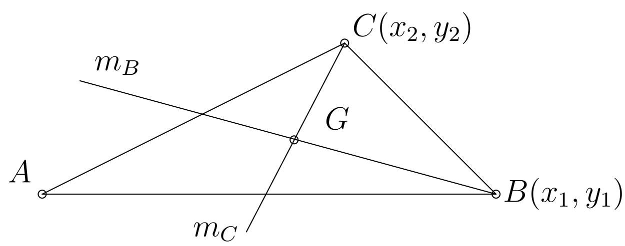
и получаваме

$$x_1 = -4, \quad y_1 = 4 \implies A(-4, 4)$$

$$x_2 = -1, \quad y_2 = 6 \implies C(-1, 6)$$

8.13 Дадени са координатите на върха $A(4, -2)$ и уравненията на медианите $m_B : y + 1 = 0$ и $m_C : x - 11y - 16 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

Решение:



Нека $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ и G е медицентърът на $\triangle ABC$.

1) Намираме G като пресечна точка на двете медиани: $G(5, -1)$.
2) Изразяваме координатите на медицентъра чрез координатите на върховете:

$$\frac{4 + x_1 + x_2}{3} = 5 \qquad \frac{-2 + y_1 + y_2}{3} = -1$$

3) Тъй като B лежи на m_B и C лежи на m_C, то $y_1 + 1 = 0$ и $x_2 - 11y_2 - 16 = 0$.
4) Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 11 \\ y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 + 1 = 0 \\ x_2 - 11y_2 = 16 \end{array} \right.$$

и получаваме $x_1 = -5, \quad y_1 = -1, \qquad x_2 = 16, \quad y_2 = 0.$

8.14 Дадени са уравненията на страните $AB : x-1 = 0$, $BC : 9x-2y-33 = 0$ и на ъглополовящата $l_A : x + y + 2 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение: Точката $A(1, -3)$ е пресечната точка на правите AB и l_A, а точката $B(1, -12)$ – на правите AB и BC. Намираме точка B', симетрична на точка B относно правата l_A. Получаваме $B'(10, -3)$. Точката B' лежи на правата AC. Следователно $AC : y+3 = 0$. Накрая намираме точката $C(3, -3)$ като пресечна точка на правите BC и AC.

8.15 Дадени са уравненията на страната $AB : 2x-y+6 = 0$ и на ъглополовящите $l_A : x - y + 1 = 0$ и $l_B : x + 15 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение: Точката $A(-5, -4)$ е пресечната точка на правите AB и l_A, а точката $B(-15, -24)$ – на правите AB и l_B. Намираме точка B', симетрична на точка B относно правата l_A. Получаваме $B'(-25, -14)$. Точката B' лежи на правата AC. Следователно $AC : x - 2y - 3 = 0$. Намираме точка A', симетрична на точка A относно правата l_B. Получаваме $A'(-25, -4)$. Точката A' лежи на правата BC. Следователно $BC : 2x + y + 54 = 0$. Накрая намираме точката $C(-21, -12)$ като пресечна точка на правите BC и AC.

Задачи за самостоятелна работа:

8.16. Да се определи кои от точките $M_1(2, -1),\ M_2(6, -7),\ M_3(1, 1),\ M_4(0, 2)$ лежат на правата $g : 3x + 2y - 4 = 0$.

Отг. $M_1,\ M_2,\ M_4$

8.17 Да се определи дали дадените точки лежат в една и съща полуравнина относно правата g.
а) $M_1(0, 1), \quad M_2(4, 2), \qquad g : x - y - 3 = 0$
б) $M_1(2, 4), \quad M_2(-2, 7), \quad g : y = 2x + 5$

Отг. а) да б) не

8.18 Да се намери пресечната точка на правите g_1 и g_2.
а) $g_1 : 3x + 7y - 15 = 0, \quad g_2 : 6x + 14y + 12 = 0,$
б) $g_1 : 2x + 4y - 6 = 0, \quad g_2 : 3x + 6y - 9 = 0,$
в) $g_1 : x + y + 8 = 0, \quad g_2 : 2x + 3y + 25 = 0,$

Отг. а) успоредни б) сливат се в) $M(1, -9)$

8.19 Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако са дадени уравненията на страните му.

а) $AB : 15x + 2y - 3 = 0,\quad BC : 16x + y + 7 = 0,\quad AC : x - y - 7 = 0$

б) $AB : 2x - y + 4 = 0,\quad BC : x - y + 2 = 0,\quad AC : x - 2y + 5 = 0$

Отг. а) $A(1, -6),\quad B(-1, 9),\quad C(0, -7)$

б) $A(-1, 2,)\quad B(-2, 0),\quad C(1, 3)$

8.20 Да се намерят уравненията на страните на $\triangle ABC$, ако са дадени координатите на върховете му.

а) $A(-4, 1),\quad B(5, -2),\quad C(-10, 11)$

б) $A(8, -9),\quad B(1, -5),\quad C(13, -6)$

Отг. а) $AB : x + 3y + 1 = 0,$
$BC : 13x + 15y - 35 = 0,$
$AC : 5x + 3y + 17 = 0.$

б) $AB : 4x + 7y + 31 = 0,$
$BC : x + 12y + 59 = 0,$
$AC : 3x - 5y - 69 = 0.$

8.21 Да се определи ъгълът между правите g_1 и g_2.

а) $g_1 : y = -2x + 11\quad g_2 : y = 3x - 4$

б) $g_1 : 2x - y - 3 = 0\quad g_2 : x + 2y + 2 = 0$

Отг. а) $45°$ б) $90°$

8.22 Намерете дължината на височината през върха C на $\triangle ABC$: $A(-1, -2)$, $B(2, 4)$, $C(1, 7)$.

Отг. $\sqrt{5}$

8.23 Намерете разстоянието между успоредните прави $g_1 : 3x + 4y - 15 = 0$ и $g_2 : 3x + 4y + 20 = 0$.

Отг. 7

8.24 Намерете ортоцентъра и медицентъра на $\triangle ABC$ с върхове $A(-2, -4)$, $B(0, -5)$ и $C(-3, -3)$.

Отг. $H(-8, -13)$, $G(-\frac{5}{3}, -4)$

8.25 Да се намери ортогоналната проекция P на точката M върху правата g.

а) $M(6, 8)\quad g : 2x + y - 10 = 0$

б) $M(10, -3)\quad g : x - 2y - 1 = 0$

в) $M(1, 3)\quad g : 2x + y = 0$

Отг. а) $P(2, 6)$ б) $P(7, 3)$ в) $P(-1, 2)$

8.26 Да се намери точка N, симетрична на точката M относно правата g.

а) $M(-2, 9)\quad g : 2x - 3y + 18 = 0$

б) $M(-5, 13)\quad g : 2x - 3y - 3 = 0$

в) $M(4, 5)\quad g : 3x + 2y + 4 = 0$

Отг. а) $N(2, 3)$ б) $N(11, -11)$ в) $N(-8, -3)$

8.27 През точката $A(1,2)$ е пуснат светлинен лъч, който след отразяването си от правата $g: x+5y+1=0$ минава през точка $M(-1,3)$. Да се намери уравнението на отразения лъч.

Отг. $73x+14y+31=0$

8.28 Светлинен лъч, минаващ през точката $A(8,12)$, се отразява от правата $g: x+y-3=0$ и минава през точката $B(6,1)$. Да се намерят уравненията на падащия и отразения лъч.

Отг. $p: 5x-2y-16=0, \quad l: 2x-5y-7=0$

8.29 Върху правата $g: 4x+3y-12=0$ намерете точка C, равноотдалечена от точките $A(-1,-2)$ и $B(1,4)$.

Отг. $C(3,0)$

8.30 Намерете центъра и радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, ако $A(-1,7)$, $B(0,6)$ и $C(2,5)$.

Отг. $(\frac{7}{2},\frac{21}{2}), \quad R=\frac{1}{2}\sqrt{130}$

8.31 Да се намери уравнението на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A, ако са дадени уравненията на страните на $\triangle ABC$.

а) $AB: x-2y+4=0, \quad BC: x-4=0, \quad AC: 2x-y-1=0$

б) $AB: 2x-11y+5=0, \quad BC: x-13y+25=0, \quad AC: x+2y-5=0$

Отг. а) $l: x-y+1=0$ б) $l: 7x-y-20=0$

8.32 Върху правата $p: 2x-3y+3=0$ намерете точки, равноотдалечени от правите $g_1: x-3y+4=0$ и $g_2: 3x-y-8=0$.

Отг. $M(6,5), \quad N(3,3)$

8.33 През точката $A(-1,1)$ да се прекара права, за която средата на отсечката от нея между правите $g_1: x+2y-1=0$ и $g_2: x+2y-3=0$ да лежи на правата $g_3: x-2y-6=0$.

Отг. $2x+5y-3=0$

8.34 Дадени са координатите на връх и уравненията на две височини в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

а) $B(1,1), \quad h_A: x-4=0, \quad h_C: 3x+y-1=0$
б) $C(3,7), \quad h_A: x-4y+7=0, \quad h_B: 2x+5y-23=0$
в) $B(2,10), \quad h_A: 3x-2y+22=0, \quad h_C: 2x-y+14=0$
г) $C(0,4), \quad h_A: x+y-7=0, \quad h_B: 2x+y-7=0$

Отг. а) $A(4,2), \quad C(0,1)$
б) $A(1,2), \quad B(4,3)$
в) $A(0,11), \quad C(-1,12)$
г) $A(2,5), \quad B(1,5)$

8.35 Дадени са уравненията на страна и на две височини в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

а) $AB: 3x-2y-21=0, \quad h_A: x+2y+17=0, \quad h_B: x+y+13=0$

б) $BC: x+2y-12=0, \quad h_B: 3x-2y+12=0, \quad h_C: x-y+3=0$

Отг. а) $A(1,-9)$, $B(-1,-12)$, $C(0,-10)$
б) $A(-1,7)$, $B(0,6)$, $C(2,5)$

8.36 Дадени са два върха на $\triangle ABC$ и ортоцентърът му H. Намерете третия връх.
а) $A(0,-6)$, $B(1,-4)$, $H(-6,-4)$
б) $B(1,-3)$, $C(0,-6)$, $H(6,-3)$

Отг. а) $C(0,-7)$ б) $A(0,-1)$

8.37 Дадени са уравненията на две от страните на $\triangle ABC$ и ортоцентърът му H. Намерете координатите на върховете на триъгълника.
а) $AB: x-3y+30=0$, $BC: y-10=0$, $H(3,4)$
б) $AB: 2x-3y-40=0$, $BC: x-2y-26=0$, $H(-6,-4)$

Отг. а) $A(3,11)$, $B(0,10)$, $C(1,10)$
б) $A(-1,-14)$, $B(2,-12)$, $C(0,-13)$

8.38 Дадени са уравненията на две страни и на медиана в $\triangle ABC$. Намерете уравнението на третата страна на триъгълника.
а) $AB: 3x+y+6=0$, $AC: 5x+9y+10=0$ $m_B: x-7y-64=0$
б) $AC: x-y-7=0$, $BC: 14x+25y-20=0$ $m_A: 6x+7y+10=0$

Отг. а) $BC: x+4y+35=0$
б) $AB: 16x+23y+44=0$

8.39 Дадени са координатите на връх и уравненията на височина и медиана в $\triangle ABC$. Намерете уравненията на страните на триъгълника.
а) $C(1,5)$, $h_B: x-5y+46=0$, $m_B: x+y-8=0$
б) $A(2,-7)$, $h_B: 3x+y+11=0$, $m_C: x+2y+7=0$

Отг. а) $AB: x-y+10=0$,
$BC: 2x+y-7=0$,
$AC: 5x+y-10=0$.
б) $AC: x-3y-23=0$,
$BC: 7x+9y+19=0$,
$AB: 4x+3y+13=0$.

8.40 Дадени са координатите на медицентъра G и уравненията на две страни в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.
а) $G(4,3)$, $AB: x-y+3=0$, $BC: 7x+5y-51=0$
б) $G(-1,1)$, $AB: 3x+2y-9=0$, $BC: 9x+y+3=0$

Отг. а) $A(1,4)$, $B(3,6)$, $C(8,-1)$
б) $A(-3,9)$, $B(-1,6)$, $C(1,-12)$

8.41 Дадени са координатите на връх A и уравненията на медианите през другите два върха на $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете B и C.
а)$A(2,-3)$, $m_B: y-1=0$, $m_C: 4x-7y+7=0$
б)$A(-6,9)$, $m_B: 3x-7y+41=0$, $m_C: 7x-3y+29=0$

Отг. а) $B(-9,1)$, $C(7,5)$
б) $B(5,8)$, $C(-5,-2)$

8.42 Дадени са уравненията на страните $AB : x - y + 14 = 0$, $AC : x + 4 = 0$ и на ъглополовящата $l_C : x + y = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Отг. $A(-4, 10)$, $B(-10, 4)$, $C(-4, 4)$

8.43 За $\triangle ABC$ са дадени уравненията на страната $AC : 3x - 2y + 15 = 0$ и на ъглополовящите $l_A : x - y + 6 = 0$, и $l_C : 5x + y - 144 = 0$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Отг. $A(-3, 3)$, $B(36, 29)$, $C(21, 39)$

8.44 За $\triangle ABC$ са дадени върхът $A(2, -1)$ и уравненията на височината $h_B : 7x - 10y + 1 = 0$ и ъглополовящата $l_B : 3x - 2y + 5 = 0$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

Отг. $B(5, 0)$ $C(2, 9)$

Упътване: Използвайте, че симетричната точка на точката A спрямо ъглополовящата l_B лежи на правата BC.

8.45* Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако са дадени върхът $A(3, -1)$ и уравненията на медианата $m_B : 6x + 10y - 59 = 0$ и ъглополовящата $l_C : x - 4y + 10 = 0$.

Отг. $S = 51$

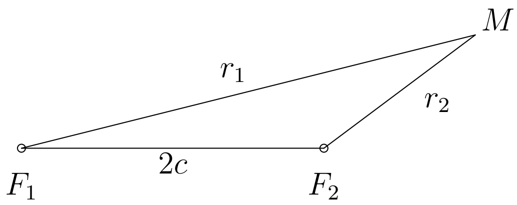
Глава 9

Елипса, хипербола, парабола

В тази глава са представени каноничните уравнения на кривите линии от втора степен - елипса, хипербола и парабола.

ЕЛИПСА

Нека в равнината са дадени две точки F_1 и F_2 , които ще наричаме фокуси, и нека разстоянието между тях е $2c$.

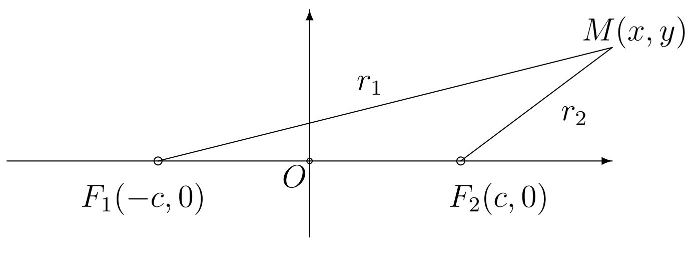


Дефиниция 9.1 *Множеството от точки в равнината, сумата от разстоянията на които до двете дадени точки е постоянна величина, по-голяма от разстоянието между тях, се нарича* ***елипса****.*

Ако означим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$ и сумата от двете разстояния с $2a$, то условието от дефиницията можем да запишем по следния начин

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (c < a) \tag{9.1}$$

За да изведем уравнението, което ще удовлетворяват точките от елипсата, ще въведем подходяща правоъгълна координатна система. Абсцисна ос ще минава през двата фокуса, а ординатната ос ще минава през средата на отсечката F_1F_2.



Тогава

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad\qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и условието (9.1) добива вида

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (a > c) \tag{9.2}$$

За да се освободим от радикалите ще преобразуваме (9.2) като повдигнем двете му страни на квадрат два пъти.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \tag{9.3}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \tag{9.4}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Полагаме

$$a^2 - c^2 = b^2$$

и получаваме

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Разделяме двете страни на a^2b^2 и получаваме

$$(k_1): \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9.5}$$

И така, ако една точка принадлежи на елипсата, координатите и удовлетворяват уравнението (9.5). За да докажем, че това е уравнението на елипса е необходимо да покажем, че за всяка точка $M(x,y)$, която удовлетворява уравнението (9.5), сумата от разстоянията до двата фокуса $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ е $2a$, т.е. тя принадлежи на елипсата.

Тъй като (9.5) е еквивалентно на (9.4), то за r_1 получаваме

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 - (1 - \frac{c^2}{a^2})x^2} =$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}$$

Следователно

$$r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|$$

Аналогично

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$$

От (9.5) получаваме

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2) \tag{9.6}$$

И тъй като лявата страна на (9.6) е неотрицателна, получаваме че $|x| \leq a$. Понеже $c < a$, то $\left|\frac{c}{a}x\right| < a$. Тогава

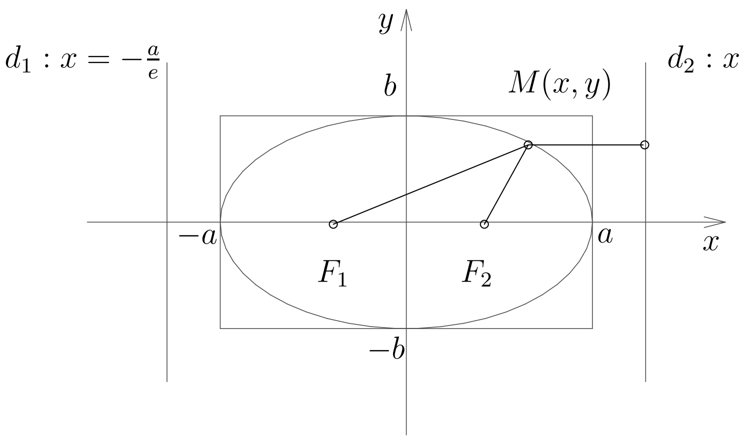
$$a - \frac{c}{a}x \geq 0, \quad a + \frac{c}{a}x \geq 0 \quad \text{и} \quad r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x$$

Следователно

$$r_1 + r_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a$$

■

От (9.5) следва, че графиката на елипсата лежи във вътрешността на правоъгълник със страни $2a$ и $2b$ и че е симетрична спрямо двете координатни оси. Пресечните точки с координатните оси имат съответно координати $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$ и $(0, b)$. Числото a се нарича *голяма полуос* на елипсата, а b - *малка полуос*.



Да означим

$$\frac{c}{a} = e \tag{9.7}$$

Числото e се нарича **ексцентрицитет** на елипсата. Тъй като $c < a$, то ексцентрицитетът на елипсата е по-малък от единица.

В следващите редове ще докажем друго характеристично свойство на елипсата. Да разгледаме правите с уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $d_2 : x = \frac{a}{e}$. Тези прави се наричат ***директриси*** на елипсата. Да означим разстоянията от произволна точка $M(x, y) \in (k_1)$ до двете директриси с ρ_1 и ρ_2. В сила е следната теорема:

Теорема 9.1

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r_2}{\rho_2} = e$$

Доказателство: Имаме $\quad r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex,$

$$\rho_1 = \frac{a}{e} + x = \frac{a + ex}{e}, \qquad \rho_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}.$$

Следователно

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{a + ex}{\frac{a+ex}{e}} = e \qquad \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a - ex}{\frac{a-ex}{e}} = e$$

Ако в уравнението на елипсата $a = b = R$, то $c = 0$ и двата фокуса ще съвпаднат. Следователно ще получим множество от точки в равнината, които са равноотдалечени от дадената точка, която в този случай наричаме център, а кривата е добре познатата ни окръжност. Следователно каноничното уравнение на окръжност с център $C(0, 0)$ и радиус R е

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ако центърът е точката $C(x_0, y_0)$, тогава уравнението на окръжността е

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Пример 9.1: Да се напише уравнението на окръжност с център $C(2, -3)$ и радиус $R = 5$.

Решение: Уравнението на окръжността е

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

или

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Пример 9.2: Да се покаже, че уравнението $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 16 = 0$ е уравнение на окръжност. Да се намерят центъра и радиуса на окръжността.

Решение: Преобразуваме даденото уравнение с цел да отделим точни квадрати

$$x^2 - 2.x.4 + 16 - 16 + y^2 + 2.y.2 + 4 - 4 - 16 = 0$$

или

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 36$$

Следователно окръжността има център $C(4, -2)$ и радиус $R = 6$.

Нека g е права линия с уравнение $y = kx + n$. Сега ще изведем условие правата g да бъде допирателна до елипсата (9.5). Щом правата g е допирателна до елипсата, то уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + n)^2}{b^2} = 1$$

има единствено решение. Следователно дискриминантата D на

$$b^2x^2 + a^2(kx + n)^2 - a^2b^2 = 0$$

е равна на нула. Последното уравнение е еквивалентно на

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

Следователно

$$D = 4a^4k^2n^2 - 4(a^2k^2 + b^2)a^2(n^2 - b^2) = 0$$

Преобразуваме последователно

$$a^4k^2n^2 - a^2(a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0$$

$$a^2k^2n^2 - (a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0$$

$$a^2k^2n^2 - a^2k^2n^2 + a^2k^2b^2 - b^2n^2 + b^4 = 0$$

$$b^2(a^2k^2 - n^2 + b^2) = 0$$

и получаваме

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \tag{9.8}$$

Нека $M(x_1, y_1)$ е точка от елипсата (9.5). Ако правата g е допирателна към елипсата в точката M, тя ще има уравнение

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Използвайки (*от математическия анализ*), че $\quad k = y'(x_1) = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ получаваме

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

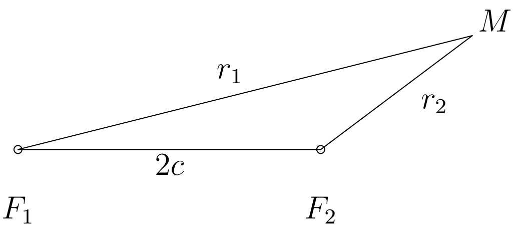
$$a^2yy_1 + b^2xx_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

което добива вида

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{9.9}$$

ХИПЕРБОЛА

Нека отново са дадени две точки F_1 и F_2 , които ще наричаме фокуси, и нека разстоянието между тях е $2c$.

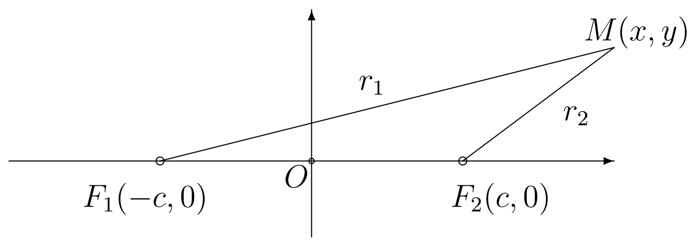


Дефиниция 9.2 *Множеството от точки в равнината, модулът на разликата от разстоянията на които до двете дадени точки е постоянна величина, по-малка от разстоянието между тях, се нарича* ***хипербола****.*

Ако означим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$ и разликата от двете разстояния с $2a$, то условието от дефиницията можем да запишем по следния начин

$$|r_1 - r_2| = 2a \qquad (a < c) \tag{9.10}$$

За да изведем уравнението на хиперболата, ще въведем правоъгълна координатна система, както при извеждане уравнението на елипсата.



Тогава

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad\qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и условието (9.10) добива вида

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \qquad (a < c) \tag{9.11}$$

За да се освободим от радикалите ще преобразуваме (9.11) като повдигнем двете му страни на квадрат два пъти.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Полагаме

$$c^2 - a^2 = b^2$$

и получаваме

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Разделяме двете страни на a^2b^2 и получаваме

$$(k_2): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9.13}$$

За да докажем, че полученото уравнение е уравнението на хипербола е необходимо да докажем, че за всяка точка $M(x, y)$, която удовлетворява уравнението (9.13), разликата от разстоянията до двата фокуса $F_1(-c, 0)$ и $F_1(c, 0)$ е $\pm 2a$. Тъй като (9.13) е еквивалентно на (9.12), то за r_1 получаваме

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 + (\frac{c^2}{a^2} - 1)x^2} =$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}$$

Да означим

$$\frac{c}{a} = e > 1 \quad \text{- } \textbf{\textit{ексцентрицитет}} \tag{9.14}$$

Следователно

$$r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = |a + ex|$$

Аналогично

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = |a - ex|$$

От (9.13) получаваме

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{1}{a^2}(x^2 - a^2) \tag{9.15}$$

И тъй като лявата страна на (9.15) е неотрицателна, получаваме че

$$x^2 - a^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-a)(x+a) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -a] \text{ или } x \in [a, \infty)$$

Следователно трябва да разгледаме два случая:

1. $x \leq -a$ Тъй като $e > 1$, следва че $a + ex < 0$ и $a - ex > 0$. Тогава

$$r_1 = -a - ex \qquad r_2 = a - ex \tag{9.16}$$

Следователно $r_1 - r_2 = -a - ex - a + ex = -2a$.

2. $x \geq a$ В този случай $a + ex > 0$, а $a - ex < 0$. Тогава

$$r_1 = a + ex \qquad r_2 = -a + ex \tag{9.17}$$

Следователно $r_1 - r_2 = a + ex + a - ex = 2a$ и с това доказахме, че наистина (9.13) е уравнението на хиперболата. ■

От (9.15) получаваме

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Да разгледаме и правите с уравнения

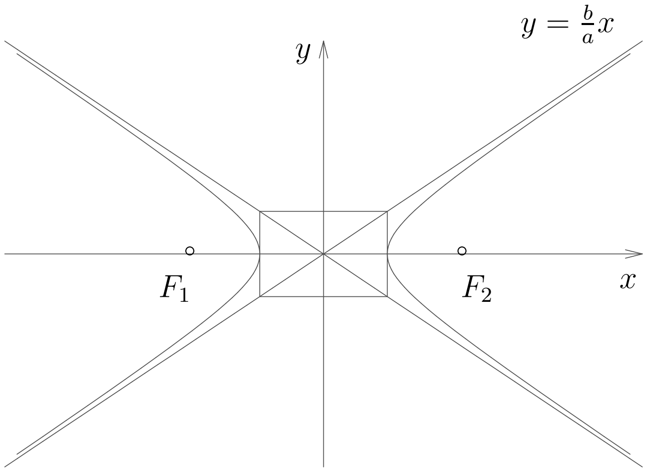
$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

В следващите редове ще докажем, че когато $x \to \infty$, графиката на хиперболата се доближава до графиката на съответната права линия. Наистина:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = ab\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

Правите с уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$ се наричат ***асимптоти*** на хиперболата.



Аналогично на елипсата, условието права линия с уравнение $y = kx + n$ да бъде допирателна на хиперболата (9.13) е

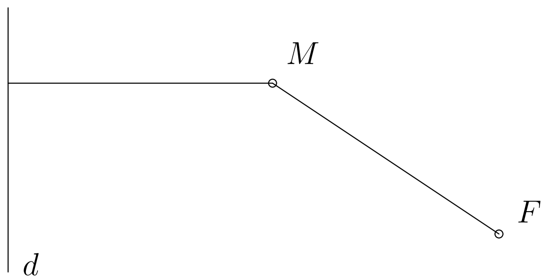
$$a^2k^2 - b^2 = n^2 \tag{9.18}$$

Ако правата е допирателна в точката $M(x_1, y_1)$ от хиперболата, то нейното уравнение е

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{9.19}$$

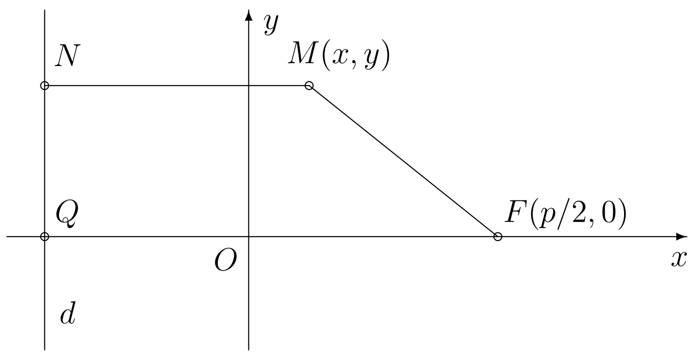
ПАРАБОЛА

Нека са дадени точка F, наречена фокус, и права d, наречена директриса.



Дефиниция 9.3 *Множеството от точки в равнината, които са равноотдалечени от фокуса и от директрисата, се нарича* ***парабола****.*

За да изведем уравнението на параболата, ще въведем подходяща правоъгълна координатна система. Абсцисната ос минава през фокуса и е перпендикулярна на директрисата, а ординатната ос разполовява разстоянието между фокуса и директрисата.



Да означим разстоянието от фокуса F до директрисата d с p. Тогава

$$|OQ| = |OF| = \frac{p}{2}$$

Точката F има координати $F(p/2, 0)$, а

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad \text{и} \qquad |MN| = x + \frac{p}{2}$$

Следователно за точките $M(x, y)$ от параболата е изпълнено

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

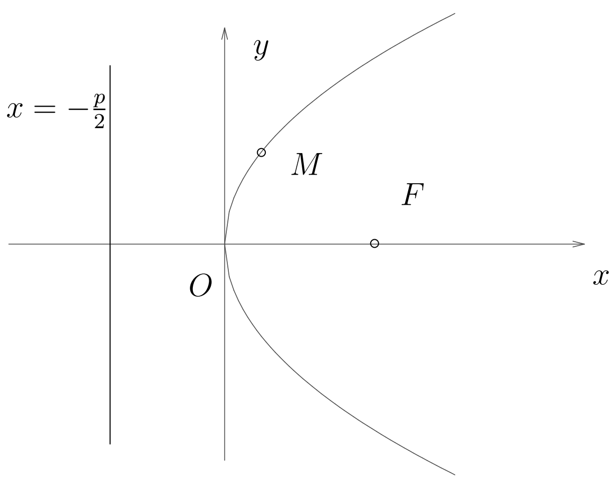
Повдигаме двете страни на последното равенство на квадрат и получаваме

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px \tag{9.20}$$

Уравнението (9.20) се нарича *канонично уравнение на парабола.*



Уравнението на допирателната в точката $M(x_1, y_1)$ от параболата е

$$yy_1 = p(x + x_1) \tag{9.21}$$

Елипсата, хиперболата и параболата притежават следните забележителни свойства:

1. Допирателната в дадена точка M на елипсата образува равни ъгли с фокалните радиуси F_1M и F_2M и лежи вън от ъгъла F_1MF_2.

2. Допирателната в дадена точка M на хиперболата образува равни ъгли с фокалните радиуси F_1M и F_2M, като разполовява ъгъла F_1MF_2.

3. Допирателната в дадена точка M на параболата образува равни ъгли с фокалния радиус FM и лъча през M, който е успореден на оста на параболата и е в нейната вътрешност.

ЗАДАЧИ

9.1 Напишете уравнението на окръжност с диаметър $AB: \ A(-4, 1), \ B(2, 3)$.

Решение: Центърът на окръжността $C(-1, 2)$ е средата на отсечката AB, а радиусът е $R = |CB| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Следователно уравнението на окръжността е $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ или $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$

9.2 Напишете уравненията на допирателните към окръжността $(k): x^2 + y^2 = 5$, които са успоредни на правата $g: 2x - y + 1 = 0$.

Решение: Тъй като допирателните са успоредни на правата g, те имат уравнения от вида $y = 2x + n$. Тогава системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y + n = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right.$$

трябва да има единствено решение. Това означава, че квадратното уравнение $x^2 + (2x + n)^2 = 5$ трябва да има единствено решение. След преобразуване уравнението добива вида $5x^2 + 4nx + n^2 - 5 = 0$. Пресмятаме неговата дискриминанта и я приравняваме на нула.

$$D = 16n^2 - 20(n^2 - 5) = 0, \quad \text{т.е.} \quad n = \pm 5$$

Следователно уравненията на допирателните са $y = 2x + 5, \ \ y = 2x - 5$.

9.3 Напишете уравнението на окръжност, която е описана около триъгълника с върхове $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$.

Решение: Центърът на окръжността G е пресечна точка на симетралите на две от страните (например AC и BC), а радиусът е разстоянието от центъра до връх на триъгълника.

Намираме симетралите $s_1 : 3x + y - 13 = 0$ и $s_2 : x + 2y - 11 = 0$ на страните AC и BC. (Направете това сами, виж зад. 8.3 от глава 8.) Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 11 = 0 \\ 3x + y - 13 = 0 \end{array} \right.$$

и получаваме центъра $G(3, 4)$. Радиусът на окръжността е $R = |GB| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Следователно търсеното уравнение е $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

9.4 Напишете декартовото уравнение на окръжността $\rho = \sin\theta + \cos\theta$.

Решение: Използваме, че

$$\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{array}$$

Следователно

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Преобразуваме и получаваме

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \text{ или } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

9.5 Напишете каноничното уравнение на елипсата, ако $a = 12$, $e = 0.5$

Решение: От $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ и $a = 12$ получаваме, че $c = 6$. Тогава $b^2 = a^2 - c^2 = 144 - 36 = 108$. Следователно уравнението на елипсата е

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1$$

9.6 Напишете каноничното уравнение на хипербола, ако $2a = 20$, $2c = 30$

Решение: Имаме $a = 10$, $c = 15$. Тогава $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100 = 125$. Следователно уравнението на хиперболата е

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1$$

9.7 Установете, че уравнението $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ е уравнение на парабола и определете координатите на нейния връх.

Решение: Преобразуваме уравнението $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ по следния начин

$$x - 2 = -3\left(y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} - \frac{16}{9}\right)$$

$$x - 2 = -3\left(y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9}\right) + \frac{16}{3}$$

$$x - \frac{10}{3} = -3\left(y + \frac{4}{3}\right)^2$$

Полагаме

$$x - \frac{10}{3} = X, \qquad y + \frac{4}{3} = Y$$

и получаваме

$$X = -3Y^2$$

При $X = 0$ и $Y = 0$ получаваме, че върхът на параболата е $A(10/3, -4/3)$.

Задачи за самостоятелна работа:

9.8 Напишете уравнението на окръжност с център C и радиус R.

а) $C(2,1)$, $R = 5$
б) $C(2,-3)$, $R = 2$
в) $C(-4,1)$, $R = 3$
г) $C(-1,-5)$, $R = 1$

Отг. а) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
б) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
в) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$
г) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 25 = 0$

9.9 Покажете, че следните уравнения са уравнения на окръжност. Намерете центъра на окръжността C и радиуса R.

а) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$
б) $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$
в) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
г) $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$

Отг.
а) $C(1,-1)$, $R = 2$
б) $C(0,-2)$, $R = \sqrt{5}$
в) $C(-2,3)$, $R = 4$
г) $C(1/2,-1)$, $R = 3/2$

9.10 Напишете уравнението на окръжност с диаметър AB.

а) $A(3,2)$, $B(5,6)$
б) $A(-1,-3)$, $B(-3,1)$

Отг. а) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$
б) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$

9.11 Намерете дължината на хордата, която правата с уравнение $y = x - 4$ отсича от окръжността $(k) : x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$.

Отг. $d = \sqrt{2}$

9.12 Напишете уравнението на общата хорда на окръжностите $(k_1) : x^2+y^2 = 10$ и $(k_2) : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$.

Отг. $x + y - 4 = 0$

9.13 Напишете уравнението на окръжност, която е вписана в триъгълника, ограничен от координатните оси и правата с уравнение $3x + 4y - 12 = 0$.

Отг. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

9.14 Напишете декартовите уравнения и начертайте следните окръжности:

а) $\rho = 4\sin\theta$
б) $\rho = \cos\theta$

Отг. а) $x^2 + y^2 - 4y = 0$
б) $x^2 + y^2 - x = 0$

9.15 Напишете каноничното уравнение на елипсата, ако:

а) $2c = 10, \quad a = 8$
б) $2c = 10, \quad b = 4$

Отг. а) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

б) $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$

9.16 Намерете уравненията на допирателните към елипсата с уравнение $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, които са успоредни на правата $g : 2x - y + 17 = 0$.

Отг. $y = 2x + 12, \quad y = 2x - 12$

9.17 Напишете каноничното уравнение на елипса, която се допира до правите $x + y - 5 = 0$ и $x - 4y - 10 = 0$.

Отг. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

9.18 Напишете уравненията на общите допирателни на елипсите $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

Отг. $x + y = \pm 3, \quad x - y = \pm 3$

9.19 Напишете каноничното уравнение на хипербола, ако:

а) $a = 5, \quad e = 1.4$
б) $2c = 10, \quad y = 0.5x$ – асимптота

Отг. а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$

б) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

9.20 Дадена е хиперболата $x^2 - y^2 = 8$. Напишете каноничното уравнение на хипербола със същите фокуси, минаваща през точката $M(-5, 3)$.

Отг. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$

9.21 Напишете каноничното уравнение на хипербола с асимптота $y = 0.5x$, която се допира до правата $5x - 6y = 8$.

Отг. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

9.22 Напишете каноничното уравнение на хипербола, която се допира до правата $x - y = 2$ в точка $M(4, 2)$.

Отг. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

9.23 Напишете каноничното уравнение на хипербола, която има за фокуси върховете на елипсата $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ и минава през нейните фокуси.

Отг. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

9.24 Установете, че следните уравнения са уравнения на параболи и определете координатите на върховете им.
а) $y = 4x^2 - 8x + 4$
б) $y = 2x^2 + 4x + 5$
в) $y = -x^2 + 2x$

Отг. а) $A(1, 0)$ б) $A(-1, 3)$ в) $A(1, 1)$

9.25 Намерете уравненията на допирателните към параболата $y^2 = 36x$, които минават през точката $M(2, 9)$.

Отг. $y = 3x + 3, \quad 2y = 3x + 12$

9.26 Намерете най-късото разстояние от параболата $y^2 = 64x$ до правата с уравнение $4x + 3y + 46 = 0$.

Отг. $d = 2$, най-близка точка $\quad A(9, -24)$

Глава 10

Трансформация на координатната система

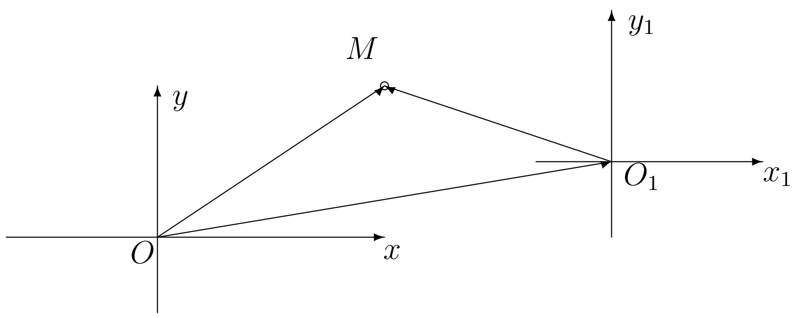
В тази глава са представени зависимостите между координатите на произволна точка при смяна на координатната система. Показано е как се канонизира уравнение на крива линия от втора степен.

СМЯНА НА КООРДИНАТНАТА СИСТЕМА

Нека в равнината е зададена декартова координатна система Oxy и точка M има координати $M(x, y)$ спрямо тази система. Нека в точката $O_1(x_0, y_0)$ въведем нова координатна система $O_1x_1y_1$ и спрямо новата координатна система координатите на точка M са $M(x_1, y_1)$. Основната задача, която си поставяме е да намерим каква е връзката между x, x_0, x_1, y, y_0 и y_1.

Първо ще разгледаме случая, когато втората координатна система е получена от първата чрез **успоредно пренасяне (транслация)**.

1. Транслация



Нека единичните вектори по осите O_1x_1 и O_1y_1 са съответно $\overrightarrow{i_1}$ и $\overrightarrow{j_1}$. Тогава имаме:

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{OO_1} = x_0.\overrightarrow{i} + y_0.\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{O_1M} = x_1.\overrightarrow{i_1} + y_1.\overrightarrow{j_1}$$

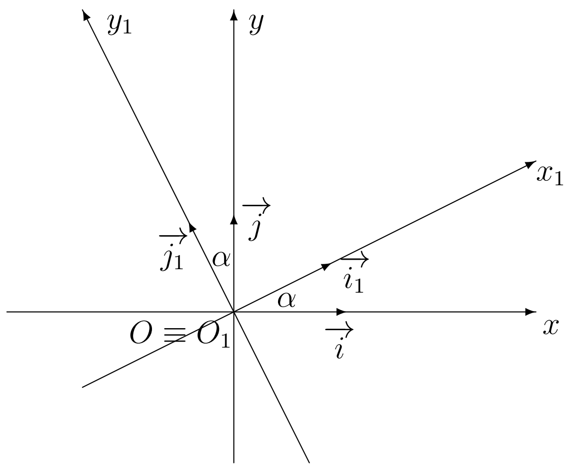
Но координатната система $O_1x_1y_1$ е получена от Oxy чрез успоредно пренасяне, т.е $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i_1}$ и $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j_1}$ и следователно

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1.\overrightarrow{i} + y_1.\overrightarrow{j}$$

Имаме
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$
и следователно
$$x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} = x_0.\overrightarrow{i} + y_0.\overrightarrow{j} + x_1.\overrightarrow{i} + y_1.\overrightarrow{j}$$
$$\Longrightarrow \quad (x - x_0 - x_1).\overrightarrow{i} + (y - y_0 - y_1).\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$$
Тъй като векторите $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ са линейно независими, то последното равенство е възможно само когато
$$\begin{cases} x - x_0 - x_1 & = & 0 \\ y - y_0 - y_1 & = & 0 \end{cases},$$
т.е.
$$\begin{cases} x & = & x_0 + x_1 \\ y & = & y_0 + y_1 \end{cases} \tag{10.1}$$

2. Въртене (ротация)

При ротация координатната система $O_1x_1y_1$ се получава от Oxy чрез завъртане на $\measuredangle\alpha$.



От чертежа се вижда, че ъглите между единичните вектори на двете координатни системи са:
$$\measuredangle(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{i}) = \alpha, \quad \measuredangle(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$
$$\measuredangle(\overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{j}) = \alpha, \quad \measuredangle(\overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{i}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$
Следователно, ако $\overrightarrow{i_1}(x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{j_1}(x_2, \ y_2)$, то (виж глава 6, стр. 98)

$$x_1 = \overrightarrow{i_1}.\overrightarrow{i} = \cos\alpha \qquad y_1 = \overrightarrow{i_1}.\overrightarrow{j} = \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

$$x_2 = \overrightarrow{j_1}.\overrightarrow{i} = \cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \qquad y_2 = \overrightarrow{j_1}.\overrightarrow{j} = \cos\alpha$$

Тогава

$$\begin{array}{rcrcr} \overrightarrow{i_1} & = & \cos\alpha.\overrightarrow{i} & + & \sin\alpha.\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j_1} & = & -\sin\alpha.\overrightarrow{i} & + & \cos\alpha.\overrightarrow{j} \end{array} \tag{10.2}$$

Равенствата (10.2) можем да запишем в матричен вид

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{j_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

е равна на 1 и следователно тя има обратна. Тогава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{j_1} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{array}{rcrcr} \overrightarrow{i} & = & \cos\alpha.\overrightarrow{i_1} & - & \sin\alpha.\overrightarrow{j_1} \\ \overrightarrow{j} & = & \sin\alpha.\overrightarrow{i_1} & + & \cos\alpha.\overrightarrow{j_1} \end{array} \tag{10.3}$$

Координатите на произволна точка M са $M(x, y)$ спрямо Oxy и $M(x_1, y_1)$ спрямо Ox_1y_1. Тогава

$$(x, y)\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{pmatrix} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{j_1} \end{pmatrix} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha.x_1 - \sin\alpha.y_1, \sin\alpha.x_1 + \cos\alpha.y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{pmatrix}$$

и следователно

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \cos\alpha.x_1 - \sin\alpha.y_1 \\ y & = & \sin\alpha.x_1 + \cos\alpha.y_1 \end{array} \right. \tag{10.4}$$

3. Общ случай на смяна на координатната система

Общият случай на смяна на координатната система е последователно прилагане на транслация и ротация или обратното. Следователно формулите в този случай са:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & x_0 & + & \cos\alpha.x_1 - \sin\alpha.y_1 \\ y & = & y_0 & + & \sin\alpha.x_1 + \cos\alpha.y_1 \end{array} \right. \tag{10.5}$$

КАНОНИЗИРАНЕ УРАВНЕНИЯТА НА КРИВИ ЛИНИИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

Общото уравнение на крива линия от втора степен има вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

където коефициентите a_{ij} са реални числа.

Чрез подходяща смяна на координатната система уравнението на крива линия от втора степен може да се сведе до едно от 9 нееквивалентни уравнения, като 6 задават реални криви (в частност - двойки прави) и 3 имагинерни. Шестте реални са елипса, хипербола, парабола, две пресичащи се прави, две успоредни прави или две сливащи се прави. Този процес наричаме **канонизация**. Канонизацията извършваме чрез последователно прилагане на ротация и транслация.

1. Ако $a_{12} \neq 0$, извършваме подходяща ротация

$$\begin{cases} x = \cos\alpha.x_1 - \sin\alpha.y_1 \\ y = \sin\alpha.x_1 + \cos\alpha.y_1 \end{cases}$$

с цел в новото уравнение да липсва смесеното произведение x_1y_1.

Ъгълът α се определя от условието

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \tag{10.6}$$

След това извършваме транслация.

2. Ако $a_{12} = 0$, извършваме само транслация.

Ще демонстриране канонизацията с няколко примера.

ЗАДАЧИ

10.1 Да се канонизира уравнението на кривата

$$17x^2 - 6xy + 9y^2 + 12x - 36y - 252 = 0 \tag{10.7}$$

Решение: Тъй като $a_{12} \neq 0$, трябва да извършим подходяща ротация на координатната система Oxy. Ъгълът α определяме от условието

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Но

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

Следователно

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Преобразуваме и получаваме

$$tg^2\alpha + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \cdot tg\alpha - 1 = 0 \tag{10.8}$$

В (10.8) заместваме $a_{11} = 17, a_{22} = 9, a_{12} = -3$ и получаваме квадратното уравнение

$$3tg^2\alpha - 8tg\alpha - 3 = 0$$

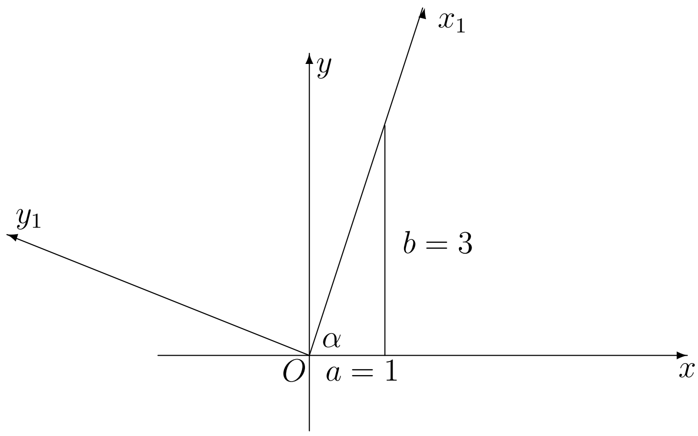
Неговите решения са $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}\alpha = -1/3$. Избираме $\operatorname{tg}\alpha = 3$ (за да извършим ротацията в положителна посока).

За да определим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ можем да постъпим по един от следните два начина:

Първи начин: Използваме познатите формули от тригонометрията

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Втори начин:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{1}, \qquad b = 3, a = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Следователно формулите за ротацията са

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sqrt{10}}(x_1 - 3y_1) \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{10}}(3x_1 + y_1) \end{aligned}$$

Заместваме в (10.7) и след преобразуване получаваме

$$8x_1^2 + 18y_1^2 - \frac{96}{\sqrt{10}}x_1 - \frac{72}{\sqrt{10}}y_1 - 252 = 0$$

Сега трябва да направим транслация, т.е. да отделим точни квадрати.

$$8(x_1^2 - \frac{12}{\sqrt{10}}x_1) + 18(y_1^2 - \frac{4}{\sqrt{10}}y_1) - 252 = 0$$

$$8(x_1^2 - 2\frac{6}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{36}{10} - \frac{36}{10}) + 18(y_1^2 - 2\frac{2}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{4}{10} - \frac{4}{10}) - 252 = 0$$

$$8(x_1 - \frac{6}{\sqrt{10}})^2 + 18(y_1 - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 288$$

Извършваме транслация на координатната система $O_1x_1y_1$

$$\begin{aligned} x_1 &= X + \tfrac{6}{\sqrt{10}} \\ y_1 &= Y + \tfrac{2}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

и получаваме каноничното уравнение на кривата спрямо последната координатна система O_2XY, $(O_2(\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}))$

$$\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

Следователно уравнението (10.7) е уравнение на елипса.

10.2 Да се канонизира уравнението на кривата

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0 \qquad (10.9)$$

Решение: Коефициентът $a_{12} \neq 0$ и трябва да извършим ротация на координатната система Oxy.
Ъгълът α определяме от условието (10.8). Заместваме $a_{11} = 3, a_{22} = 0, a_{12} = -2$ и получаваме квадратното уравнение

$$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0$$

Неговите решения са $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$. Избираме $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Определяме $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ по втория начин.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{1}, \qquad b = 2, a = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Следователно формулите за ротацията са

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) \end{aligned}$$

Заместваме в (10.9) и след преобразуване получаваме

$$4y_1^2 - x_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 5 = 0$$

Сега отделяме точни квадрати:

$$4(y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1) - (x_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1) - 5 = 0$$

$$4(y_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}) - (x_1^2 - 2\frac{3}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{9}{5} - \frac{9}{5}) - 5 = 0$$

$$4(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - (x_1 - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 = 4$$

Извършваме транслация на координатната система $O_1x_1y_1$

$$x_1 = X + \tfrac{3}{\sqrt{5}}$$

$$y_1 = Y - \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

и получаваме каноничното уравнение на кривата спрямо последната координатна система O_2XY, $(O_2(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ - спрямо $Ox_1y_1)$

$$\frac{Y^2}{1} - \frac{X^2}{4} = 1$$

Следователно уравнението (10.9) е уравнение на хипербола.

10.3 Да се канонизира уравнението на кривата

$$4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 9 = 0 \tag{10.10}$$

Решение: Коефициентът $a_{12} = 0$ и трябва да извършим само транслация на координатната система Oxy.

$$4(x^2 - 2x) - (y^2 + 6y) - 9 = 0$$

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 6y + 9 - 9) - 9 = 0$$

$$4(x-1)^2 - 4 - (y+3)^2 + 9 - 9 = 0$$

$$4(x-1)^2 - (y+3)^2 = 4$$

Извършваме транслация на координатната система Oxy

$$x = X + 1$$

$$y = Y - 3$$

и получаваме каноничното уравнение на кривата спрямо последната координатна система O_2XY, $(O_2(1, -3)$ - спрямо $Oxy)$

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

Следователно уравнението (10.10) е уравнение на хипербола.

Задачи за самостоятелна работа:

Да се канонизират уравненията и начертаят линиите:

10.4 $x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 6 = 0$

Отг. $\frac{2X^2}{57} + \frac{8Y^2}{57} = 1$

10.5 $x^2 - 3y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$

Отг. $\frac{12X^2}{11} - \frac{36Y^2}{11} = 1$

10.6 $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

Отг. $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$

10.7 $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

Отг. $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$

10.8 $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

Отг. $Y^2 = 2\sqrt{2}X$

10.9 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$

Отг. $Y^2 = 2\sqrt{5}X$

10.10 $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

Отг. $Y^2 = -3\sqrt{2}X$

10.11 $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$

Отг. $\begin{array}{c} 2X - Y = 0 \\ 2X + Y = 0 \end{array}$

10.12 $25x^2 + 40xy + 16y^2 + 70x + 56y + 49 = 0$

Отг. $5X + 4Y + 7 = 0$

10.13 $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$

Отг. $\begin{array}{c} X + Y + 1 - \sqrt{5} = 0 \\ X + Y + 1 + \sqrt{5} = 0 \end{array}$

10.14 $3x^2 + 8xy + 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$

Отг. $\begin{array}{c} 3X - Y - 2 = 0 \\ X + 3Y - 4 = 0 \end{array}$

Глава 11

Повърхнини от втора степен

Общото уравнение на повърхнина от втора степен има вида

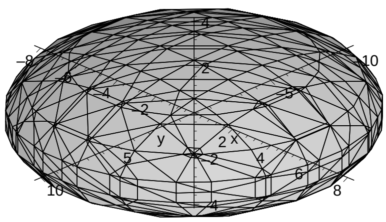
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

където коефициентите a_{ij} са реални числа.

Аналогично на кривите линии от втора степен общото уравнение на повърхнина от втора степен може чрез подходяща смяна на координатната система да се канонизира. Основните повърхнини от втора степен имат следните канонични уравнения:

ЕЛИПСОИД

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Координатите на точките от повърхнината удовлетворяват условията

$$-a \leq x \leq a, \qquad -b \leq y \leq b, \qquad -c \leq z \leq c$$

Елипсоидът е симетричен спрямо координатните равнини и координатното начало, защото и трите променливи са повдигнати на втора степен. Сеченията на повърхнината с равнини, успоредни на координатните равнини са елипси.

Ако $a = b = c = R$, елипсоидът е централна сфера

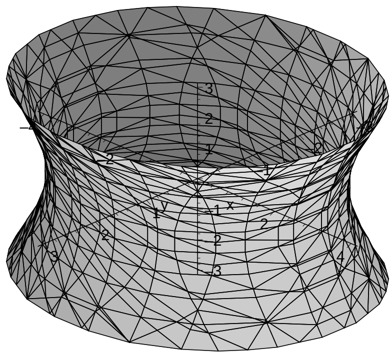
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Ако центърът на сферата е $C(x_0, y_0, z_0)$, уравнението на сферата е

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

ХИПЕРБОЛОИД С ЕДНА ПОВЪРХНИНА

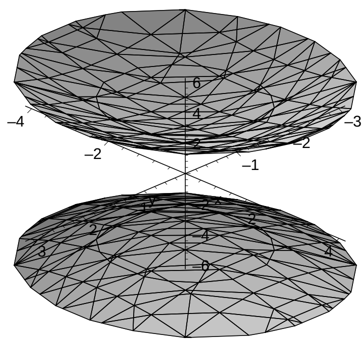
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Хиперболоидът с една повърхнина е повърхнина, която също е симетрична спрямо координатните равнини и координатното начало, защото и трите променливи са на втора степен. Сеченията на повърхнината с равнини, успоредни на координатната равнина Oxy са елипси, а с другите две координатни равнини са хиперболи. Може да се покаже, че хиперболоидът с една повърхнина е праволинейна повърхнина, като съществуват две фамилии успоредни прави линии, които го образуват. През всяка точка на хиперболоида с една повърхнина минава по една линейна образувателна от двете фамилии.

ХИПЕРБОЛОИД С ДВЕ ПОВЪРХНИНИ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



От

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 = \frac{z^2 - c^2}{c^2}$$

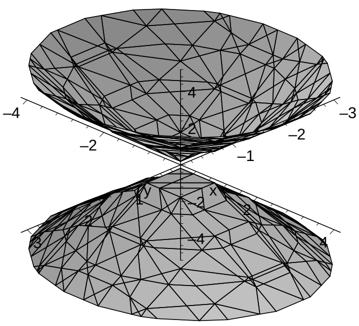
следва

$$(z - c)(z + c) \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad |z| \geq c$$

Сеченията на повърхнината с равнини, успоредни на координатната равнина Oxy са елипси, а с другите две координатни равнини са хиперболи.

КОНУС

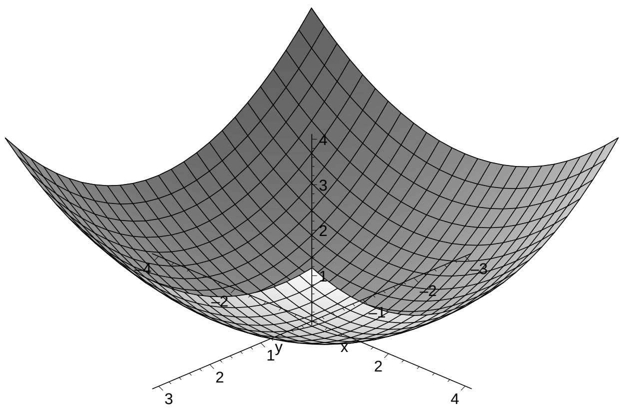
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Върхът на конуса е в началото на координатната система. Конусът е симетричен спрямо координатните равнини и координатното начало, защото уравнението му не се изменя, ако заменим x с $-x$, y с $-y$ и z с $-z$. Равнините, успоредни на координатната равнина Oxy, го секат в елипси, а равнините минаващи по оста z $(y = kx)$ го пресичат в две пресичащи се прави линии, които са образувателните му. Равнините, успоредни на образувателните го секат в параболи, а равнините, успоредни на оста z в хиперболи. Поради тази причина, още от древните гърци, елипсата, хиперболата и параболата са познати като *трите конусни сечения.*

ЕЛИПТИЧЕН ПАРАБОЛОИД

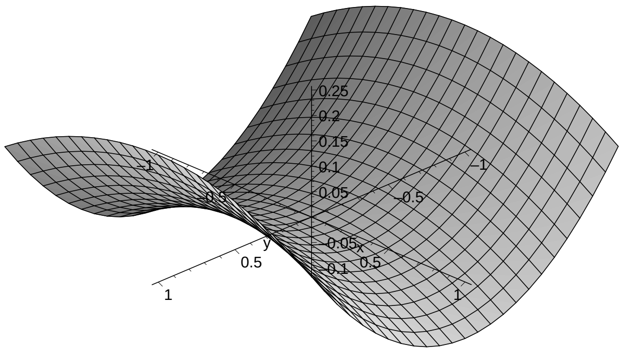
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



Елиптичния параболоид минава през началото на координатната система и е разположен над равнината Oxy. Оста z е ос на симетрия, защото уравнението му не се изменя, ако заменим x с $-x$ и y с $-y$. Той е симетричен спрямо координатните равнини Oxz и Oyz. Равнините, успоредни на координатната равнина Oxy, го секат в елипси, а равнините минаващи по оста z го пресичат в параболи.

ХИПЕРБОЛИЧЕН ПАРАБОЛОИД

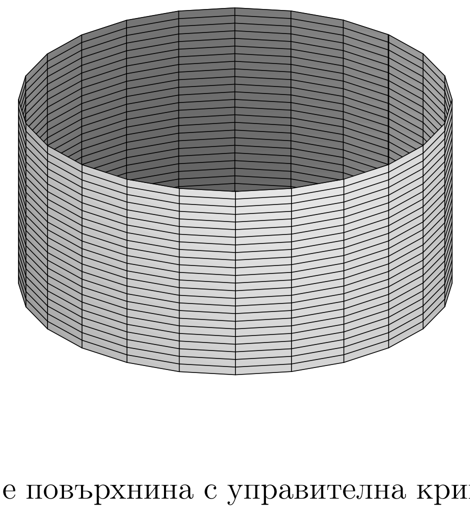
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



Хиперболичният параболоид (седло) минава през началото на координатната система. Оста z е ос на симетрия. Той е симетричен спрямо координатните равнини Oxz и Oyz. Равнините, успоредни на координатната равнина Oxy, го секат в хиперболи. Равнината $Oxy \;\; (z = 0)$ го пресича в две прави линии - $y = \pm\frac{b}{a}x$. Равнините, минаващи по оста z го пресичат в параболи. Може да се покаже, че хиперболичният параболоид е праволинейна повърхнина, образувана от две фамилии прави линии.

ЕЛИПТИЧЕН ЦИЛИНДЪР

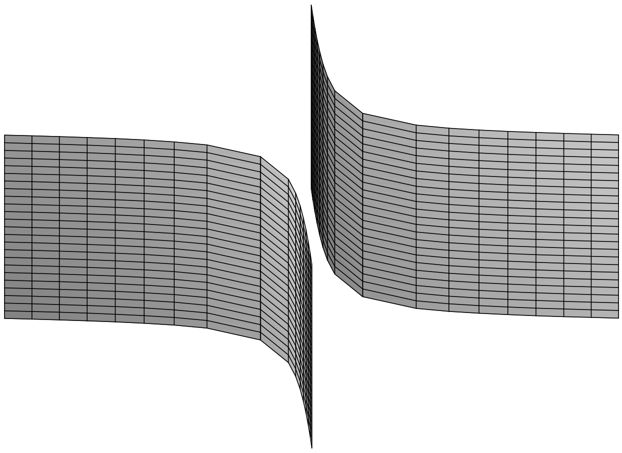
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Елиптичният цилиндър е повърхнина с управителна крива елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и образувателна, успоредна на оста z.

ХИПЕРБОЛИЧЕН ЦИЛИНДЪР

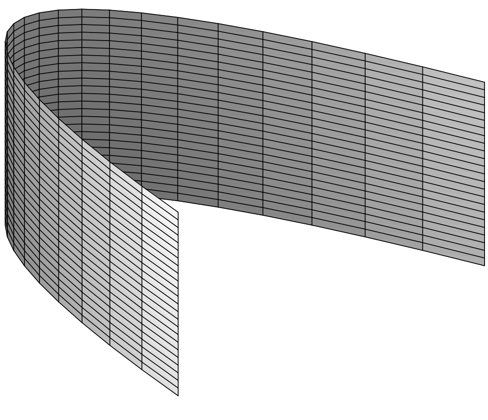
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Хиперболичният цилиндър е повърхнина с управителна крива хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и образувателна, успоредна на оста z.

ПАРАБОЛИЧЕН ЦИЛИНДЪР

$$y^2 = 2px$$



Параболичният цилиндър е повърхнина с управителна крива параболата $y^2 = 2px$ и образувателна, успоредна на оста z.

ЗАДАЧИ

11.1 Намерете центъра и радиуса на сферата $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$.

Решение: Отделяме точни квадрати

$$x^2-2x+y^2+4y+z^2-6z-22=0$$

$$x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+z^2-6z+9-9-22=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^3=36=6^2$$

Следователно центърът на сферата е $C(1,-2,3)$ и радиусът е $R=6$.

11.2 Напишете уравнението на сфера с диаметър AB: $A(-4,1,0)$, $B(2,3,4)$.

Решение: Центърът на сферата $C(-1,2,2)$ е средата на отсечката AB, а радиусът е

$$R=|CB|=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

Следователно уравнението на сферата е $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$.

11.3 Намерете дължината на хордата, която се получава при пресичането на сферата $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ с правата $g:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{0}$.

Решение: Написваме скаларно-параметричните уравнения на правата

$$g:\ \begin{cases} x= & 1 & + & 2t \\ y= & 2 & - & t \\ z= & -1 & & \end{cases}$$

Заместваме $x=1+2t, y=2-t, z=-1$ в уравнението на сферата и получаваме квадратното уравнение

$$(1+2t)^2+(2-t)^2+1+2(1+2t)+4(2-t)-20=0$$

$$5t^2-4=0$$

Корените му са

$$t=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

и следователно пресечните точки на правата и сферата са

$$M(1+\frac{4}{\sqrt{5}},2-\frac{2}{\sqrt{5}},-1), \qquad N(1-\frac{4}{\sqrt{5}},2+\frac{2}{\sqrt{5}},-1).$$

Дължината на хордата MN е $d=|MN|=\sqrt{\frac{64}{5}+\frac{16}{5}}=\sqrt{16}=4$.

Задачи за самостоятелна работа:

11.4 Намерете центъра и радиуса на сферите:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 2z + 10 = 0$

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 7 = 0$

Отг. $C(3, -4, 1), \quad R = 4$

$C(0, 0, 3), \quad R = 4$

11.5 Как са разположени спрямо сферата $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ точките $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 2, -2)$, $C(5, 3, \sqrt{3})$?

Отг. A - външна, B - вътрешна, C - принадлежи

11.6 Напишете уравнението на сфера с диаметър AB.

а) $A(3, 2, -1), \qquad B(5, 6, 5)$

б) $A(-1, -3, 2), \qquad B(-3, 1, 6)$

Отг. $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 14$

$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 9$

11.7 Напишете уравнението на сфера с център $C(4, 5, -2)$, която се допира до сферата $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 36 = 0$.

Отг. $(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 25$

$(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 1$

11.8 Напишете уравнението на сфера, която минава през точките $A(1, 2, 2)$ и $B(1, 0, 0)$, ако центърът и лежи на правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$.

Отг. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$

11.9 Напишете уравнението на сфера, която минава през точките $A(1, 2, -4)$, $B(1, -3, 1)$ и $C(2, 2, 3)$, ако центърът и лежи в равнината Oxy.

Отг. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$

11.10 Намерете центъра и радиуса на окръжността, получена от пресичането на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ с равнината $2x + 2y - z - 18 = 0$.

Отг. $C(4, 4, -2), \qquad R = 8$

11.11 Какви повърхнини определят следните уравнения. Направете чертежи.

а) $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$
б) $9x^2 + 3y^2 - 27z^2 = 9$
в) $5x^2 + 10y^2 - z^2 = -10$
г) $3x^2 + y^2 - z^2 = 0$
д) $3x^2 + y^2 = 9z$
е) $x^2 - y^2 = 8z$
ж) $x^2 + 4y^2 = 4$
з) $2x^2 - 3y^2 = 6$
и) $y^2 = 12x$
к) $x^2 + y^2 = -2z$
л) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$
м) $4x^2 + y^2 = -8z$

Отг.
а) елипсоид
б) хиперболоид
в) хиперболоид
г) конус
д) елиптичен параболоид
е) хиперболичен параболоид
ж) елиптичен цилиндър
з) хиперболичен цилиндър
и) параболичен цилиндър
к) ротационен параболоид
л) конус
м) елиптичен параболоид

11.12 Какви повърхнини определят следните уравнения. Направете чертежи.

а) $x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4z + 1 = 0$
б) $x^2 + 2y^2 - 8z^2 + 4x = 0$
в) $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 8z - 16 = -4$
г) $3x^2 + y^2 - z^2 + 6z - 9 = 0$
д) $3x^2 + 9y^2 - 9z = 27$
е) $x^2 - 2y^2 = 8(z - 2)$
ж) $x^2 + 4y^2 - 2x = 3$
з) $x^2 - 3z^2 = 6$
и) $x^2 = 6z$
к) $x^2 - 2z - 2 = 0$
л) $z^2 + 3y^2 - 6(x - 1)^2 = 0$
м) $4x^2 + y^2 = 16 - 8z$

Отг.
а) елипсоид
б) хиперболоид
в) хиперболоид
г) конус
д) елиптичен параболоид
е) хиперболичен параболоид
ж) елиптичен цилиндър
з) хиперболичен цилиндър
и) параболичен цилиндър
к) параболичен цилиндър
л) конус
м) елиптичен параболоид

Разгледаните теми могат да бъдат намерени и в следните книги, учебници и сборници:

[1] Димова В.С., Н.С. Стоянов, Висша математика. Част 1. София, Техника, 1977.

[2] Топенчаров В., Н. Стоянов и др. Сборник от задачи по висша математика. Част 1. София, Техника, 1979.

[3] Станилов Г., Аналитична геометрия. София, Наука и изкуство, 1975.

[4] Петров К., Аналитична геометрия на равнината в задачи. София, НП, 1976.

[5] Практикум по линейна алгебра и аналитична геометрия. Катедра "Математика", ВМЕИ, Габрово, 1987.

[6] С. Капралов, Р. Даскалов, П.Събев, Е. Методиева, Сборник по аналитична геометрия. ТУ-Габрово, 1996.

[7] А. Атанасов, В. Терзиева, Р. Даскалов, С. Капралов, Сборник от решени задачи по висша математика, Алма матер интернационал, 1998.

[8] Болгов В.А., Б.П. Демидович, Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Москва, Наука, 1986.

[9] Бугров Я.С., С.М. Никольский, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва, Наука, 1986.

[10] Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Минск, Высшэйшая школа, 1982.

[11] Каплан И. А., Практические занятия по высшей математике. Част I. ХГУ, Харьков, 1960.

[12] А. Н. Канатников, А.П. Крищенко, Аналитическая геометрия, Москва, Издательство МГТУ имени Н. Баумана, 2002.

[13] А. Н. Канатников, А.П. Крищенко, Линейная алгебра, Москва, Издательство МГТУ имени Н. Баумана, 2002.

[14] Papula L., Mathematik fur ingenieure, I, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.

[15] G. Eisenreich, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Academie Verlag GmbH, Berlin, 1991.