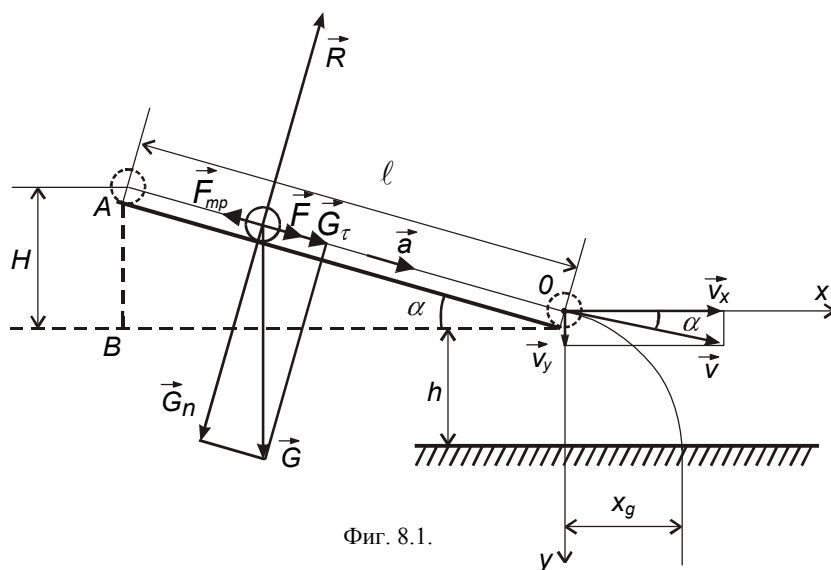


7 Определяне на кинематични и динамични величини при движение на сферично тяло по наклонен улей

Теоретична постановка

При движението си всяко тяло описва линия, наричана *траектория*. Пътят, скоростта и ускорението са величини, които дават представа какво е движението на тялото. Тези величини се наричат *кинематични* и характеризират движението, независимо от причините за него. С условията за възникване и прекратяване на механичните движения на телата се занимава *динамиката*. В този дял на механиката се въвеждат две важни физически величини – *сила* и *маса*.

Като илюстрация за определянето на някои кинематични и динамични величини може да се изследва движението на тежко топче (плътна хомогенна сфера) по наклонен улей.



Фиг. 8.1.

Силите, които действуват върху топчето (фиг. 8.1), са *теглото* му \vec{G} , *реакцията на опората* \vec{R} и *силата на триене* $\vec{F}_{тр}$. *Натискът*, който топчето оказва върху наклонената равнина, според третия закон на динамиката, е $\vec{G}_n = -\vec{R}$. Ако се приеме, че топчето се търкаля по наклонената равнина *без да се хлъзга*, големината на силата на триене е

$$F_{TP} = k \frac{G_n}{r}, \quad (8.1)$$

където r е радиуса на топчето, а k – коефициента на триене. Тогава равнодействащата сила е $\vec{F} = \vec{R} + \vec{G} + \vec{F}_{TP} = \vec{G}_r + \vec{F}_{TP}$.

Според втория закон на динамиката, ако векторната сума от всички сили, приложени към тяло с маса m , е $\vec{F} \neq \vec{0}$, то тялото се движи с ускорение $\vec{a} = \vec{F} / m$. Законът за скоростта при равноускорително движение без начална скорост е $v = at$, а законът за пътя – $\ell = at^2 / 2$. Скоростта на топчето в момента, в който то напуска улея, при съвместно решаване на последните две уравнения, е

$$v = \frac{2\ell}{t} \quad (8.2)$$

където ℓ е пътя, изминат от началното положение на топчето до края на улея, а t – времето, необходимо за изминаването на този път.

След като топчето напусне улея, движението му е движение с начална скорост \vec{v} , която сключва с хоризонта ъгъл α . На тялото действа само теглото \vec{G} . Координатната система, относно която е удобно да се опише това движение, се избира по следния начин (фиг. 8.1). Началото ѝ O съвпада с края на улея; оста Ox е успоредна на хоризонта, а Oy – вертикална, по посока на \vec{G} . Тъй като единствената сила, действаща на топчето, е \vec{G} , то движението му по посоката Ox ще бъде *праволинейно и равномерно* със скорост \vec{v}_x , тъй като $\vec{G} \perp Ox$, а движението му по посоката на Oy ще бъде *равноускорително*, с начална скорост. Координатата x на центъра на топчето ще се изменя по закона

$$x = v_x t = vt \cos \alpha. \quad (8.3)$$

Ако вертикалната съставяща на скоростта в началото O се означи с v_{y0} , то може да се запише, че:

$$\begin{aligned} v_y &= v_{y0} + gt = v \sin \alpha + gt, \\ y &= v_{y0}t + gt^2/2 = v(\sin \alpha)t + gt^2/2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Движението на топчето се описва с уравненията (8.3) и (8.4). Ако от уравнението (8.3) се определи t и се замести в уравнението за координатата y , се получава

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

откъдето може да се пресметне стойността на *земното ускорение*

$$g = 2v^2(h - x_g \operatorname{tg} \alpha) \frac{1}{x_g^2} \cos^2 \alpha, \quad (8.5)$$

където h е височината от края на улея до равнината на падане, а $x = x_g$ при $y = h$.

Физическата величина, която определя способността на телата да извършват работа, се нарича *енергия*. Топчето в разглеждания случай има енергия, която е само потенциална в началното му положение. В следващите моменти тя преминава в енергия на движението, което по отношение на центъра на топчето е постъпателно. Това движение се осъществява чрез въртене на сферичното тяло и, когато то става без хлъзгане, ъгловата скорост е $\omega = v / r$. Кинетичната енергия при *постъпателното* му движение е

$$E'_k = \frac{mv^2}{2}, \quad (8.6)$$

а при *въртеливото* движение –

$$E''_k = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (8.7)$$

където I е инерционния момент на тялото. За плътна хомогенна сфера с маса m и радиус r .

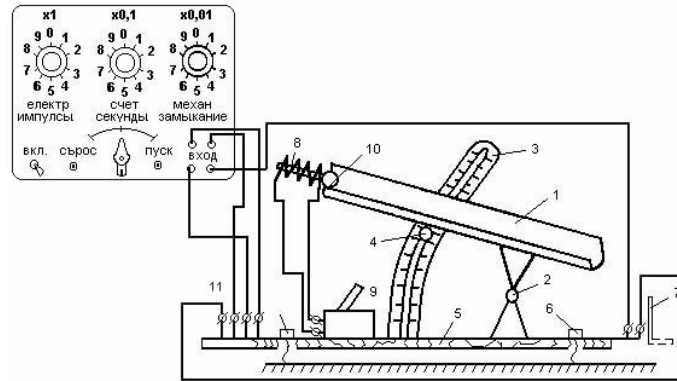
$$I = \frac{2}{5} mr^2. \quad (8.8)$$

Потенциалната енергия в началния момент зависи само от височината H и е $E_{п0} = mgH$. Сумата $E = E_k + E_p$ дава *пълната механична енергия* на тялото. Изменението ѝ е равно на работата, извършена от всички външни сили, $\Delta E = A_{\text{външ}}$. Ако E_0 е *пълната* механична енергия на топчето в *началната точка* ($t_0 = 0$), то $E_0 = E_{п0} + E'_{k0} + E''_{k0} = E_{п0} = mgH$ ($v = 0$, $\omega = 0$, следователно $E'_{k0} = E''_{k0} = 0$). Пълната механична енергия на топчето в момента, когато то *напуска* улея, е $E = E_p + E'_k + E''_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ (при $H = 0$, $E_p = 0$). Тогава *работата*, която извършва топчето за *преодоляване силата на триене* $F_{\text{тр}}$, приемана за постоянна, е

$$A_{\text{тр}} = Fl = \Delta E = E_0 - E_2 = mgH - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \right). \quad (8.9)$$

Опитна постановка

Опитната постановка (фиг. 8.2) представлява метален улей 1, шарнирно закрепен в оста 2 и дъгата 3 върху поставка 5, която може да се хоризонтира чрез винтовете 6. С помощта на винт 4 улеят може да се фиксира под



Фиг. 8.2.

различни ъгли спрямо 5. За да няма хлъзгане, ъгълът α (фиг. 8.1) не бива да е по-голям от 10° . В долния край на 5 е монтирана пластинка 7, която може да заема две крайни положения – вертикално (напречно за улея) и хоризонтално. В горния край на улея е монтиран електромагнитът 8, който при положение на превключвателя 9 наляво е включен и задържа стоманеното топче 10 в началното му положение. За отчитане на времето се използва електронен секундомер. Електрическата схема за захранване се осъществява със свободните проводници 11.

Задачи и указания за изпълнението им

Задача 1. Да се определи кинетичната енергия E_k на постъпателното движение на топчето в момента, в който то напуска улея.

Предварително се определя с лабораторна везна масата m на стоманеното топче. Измерва се дължината l на пътя, който топчето изминава по улея. Проверява се правилно ли е осъществена електрическата схема. Ключът 9 се поставя в такова положение, че през електромагнита да протича електрически ток. Пластинката 7 се поставя във *вертикално* положение. Топчето се “залепва” за електромагнита. Изчистват се показанията на секундомера. Ключът 9 се поставя в положение “пуск”, при което токът през електромагнита престава да протича. Така топчето се

освобожава и започва да се движи по улея; едновременно с това секундомерът започва да отчита времето. Напускайки улея, топчето удря пластинка 7 и тя заема хоризонтално положение, при което електрическата верига се прекъсва и секундомерът спира да отчита. Показанието на секундомера се записва. Опитът се повтаря 10 пъти, за да се намери средната стойност и грешката, допусната при измерването на времето t . Изчислява се скоростта v на постъпателното движение на топчето в момента, в който то напуска улея, а чрез нея – и кинетичната енергия E'_k на постъпателното движение в същия момент.

Задача 2. Да се определи кинетичната енергия E''_k на въртеливото движение на топчето в края на улея.

Измерва се диаметъра на топчето $D = 2r$. Изчислява се ъгловата му скорост ω в края на улея. Инерционният момент на топчето се изчислява по (8.8), след което се пресмята и търсената стойност на кинетичната енергия E''_k .

Задача 3. Да се определи стойността на земното ускорение.

Определянето на земното ускорение става по (8.5). Ъгълът α на наклона на улея се определя след измерване на две от страните на $\triangle BOA$ (фиг. 8.1).

Поставя се пластинката 7 (фиг. 8.2) в *хоризонтално* положение. Пуска се топчето от горния край на улея най-малко 10 пъти и се отбелязват попаденията му върху равнината на падане (пода на лабораторията). Проекцията на долния край на улея върху пода и височината h се определят чрез отвес. Измерва се и разстоянието x_g , като от всички попадения на топчето върху пода предварително се определя най-вероятното.

Задача 4. Да се определи енергията, изразходвана от топчето за преодоляване на триенето при движението му по улея, и на коефициента на триене.

Енергията, изразходвана от топчето поради триенето, се определя по (8.9), а коефициентът на триене – чрез (8.1).

За прегледност данните от измерванията и пресмятанията на търсените величини се подреждат в таблица, съдържаща стойностите, съответните грешки и единиците, в които те са измерени или изчислени.